

# Übungen zum Ferienkurs Analysis II

## Variationsrechnung und Kurven

### 3.1 Energieerhaltung bei der Variationsrechnung \*

Sei  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L \in C^2$ , die Lagrange-Funktion  $L(x, v, t)$ ,  $x, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , zum zu minimierenden Funktional  $\mathcal{F}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ . Dann erfüllt jedes zweimal stetig differenzierbare Extremum von  $\mathcal{F}$  mit den Endpunkten  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$  Die Euler-Lagrange Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

- (a) Zeigen Sie, dass bei zeitlicher Translationsinvarianz von  $\mathcal{F}$  (d.h.  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ) die Energie

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t)v - L(x, v, t)$$

erhalten ist: Ist  $\tilde{x}$  eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, so ist  $t \mapsto E(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$  eine konstante Funktion. Was passiert, wenn  $L(x, v, t)$  nur von  $t$  und  $x$ , bzw. nur von  $t$  und  $v$  abhängt?

- (b) Wie lautet die Energiefunktion  $E(x, v)$  für eine zeitunabhängige Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik  $L(x, v, t) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - V(x)$ ,  $x, v \in \mathbb{R}^n$ ?

### 3.2 Brachistochrone (Kurve kürzester Laufzeit)

Ein Massepunkt bewege sich entlang einer differenzierbaren Kurve  $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Geschwindigkeit  $v(\gamma(\theta)) > 0$ . Dann ist die Zeit zum Durchlaufen der Kurve gegeben durch

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{\|\gamma'(\theta)\|}{v(\gamma(\theta))} d\theta$$

Im Schwerfeld der Erde ist für ein anfangs ruhendes Teilchen mit  $\gamma(0) = (0, 0)$  die Geschwindigkeit gegeben durch  $v(\gamma(\theta)) = \sqrt{-g\gamma_2(\theta)}$  mit der Erdbeschleunigung  $g$ , wobei  $\gamma_2(\theta) \leq 0$  vorausgesetzt wird. Der Endpunkt sei  $\gamma(a) = (b, c)$  mit  $b > 0, c < 0$ .

- (a) Sei  $\gamma$  durch seine negative  $y$ -Komponente parametrisiert,  $\gamma(\theta) = (f(\theta), -\theta)$  wobei  $a = -c$  gesetzt ist. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Kurven  $\gamma$ , die extremal bezüglich  $T(\gamma)$  sind.
- (b) Sei  $\gamma$  nun durch seine  $x$ -Komponente parametrisiert,  $\gamma(\theta) = (\theta, g(\theta))$ , wobei jetzt  $a = b$  gewählt ist. Welche Differentialgleichung ergibt sich aus der Energieerhaltung?

### 3.3 Neilsche Parabel \*

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge  $y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{R}^2$  gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

### 3.4 Wegintegrale \*

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral  $\int_{\gamma} f(x) dx$ .

- (i)  $f(x, y) = (e^x, xy)$ ,  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$(ii) f(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2), \gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t - 1) & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

$$(iii) f(x, y, z) = (y, -z, x), \gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)), 0 \leq t \leq \ln(2)$$

$$(iv) f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2), \gamma(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

### 3.5 Länge von Kurven ★

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven:

$$(i) \gamma_1(t) = (a \cos^3(t), a \sin^3(t)) \text{ mit } 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0 \text{ fest.}$$

$$(ii) \gamma_2(t) = (t^2, t^3) \text{ mit } 0 \leq t \leq 4.$$

### 3.6 Flächeninhalt der Kardioiden ★

Sei  $a > 0$  und  $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  die Parametrisierung der Kardioiden in Polarkoordinaten,

$$r(\phi) = a(1 + \cos \phi).$$

Berechne den Flächeninhalt der Kardioiden.

### 3.7 Krümmung einer Klothoide

Zeigen Sie, dass die Krümmung  $\kappa(t)$  der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$$

an der Stelle  $t > 0$  gleich ihrer Länge  $L(t)$  ist.

*Hinweis:* Die Krümmungsformel lautet

$$\kappa = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

**Wer noch mehr üben möchte:**

### 3.8 Kreisumfang

Berechnen Sie den Umfang  $U$  des Kreises um  $(0,0)$  mit Radius  $r > 0$ . Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral  $4 \int_k 1 ds$ , bei dem  $k$  der Viertelkreisbogen ist. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie das Integral.

### 3.9 Kurvenintegral über Ellipse

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}} ds$$

über die Ellipse  $k$

$$x^2 a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wählen Sie für die Ellipse eine geeignete Parametrisierung.

### 3.10 Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und wird durch die Kurve  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(x) = (x, f(x))$  und  $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh(a))$  mit  $a > 0$  beschrieben (Einheit 1km).

- Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von  $a$ .
- Berechnen Sie die Krümmung des Seils am Scheitel und an den Rändern.
- Wie stark hängt das Seil in erster Näherung durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw. 1m zu lang ist?

### 3.11 Schraubenlinie

Die Kurve  $\gamma(t) := (r \cos(t), r \sin(t), ct)$  mit  $c, r > 0$  heißt Schraubenlinie.

- Parametrisieren Sie  $\gamma$  nach der Bogenlänge. (Verwenden Sie  $R^2 = c^2 + r^2$ )
- Berechnen Sie Tangentialeinheitsvektor, Normalenvektor und Krümmung der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve.

### 3.12 Kurvenlänge

- $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$  heißt Zykloide. Berechnen Sie die Länge der Kurve  $\gamma|_{[-\pi, \pi]}$ .
- Finden Sie die singulären Punkte der Kurve  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) := (\cos^3(t)\sin(t), \sin^3(t))$  und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

### 3.13 logarithmische Spirale

Als logarithmische Spirale bezeichnet man die Kurve  $\gamma_c(t) := (e^{ct} \cos(t), e^{ct} \sin(t))$ ,  $c > 0$ .

- Berechnen Sie die Länge  $L$  von  $\gamma_c$  auf  $[0, 4\pi]$
- Parametrisieren Sie  $\gamma_c|_{[0, 4\pi]}$  nach der Bogenlänge