Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Differenzierbarkeit und Taylor-Entwicklung

Übungen, die mit einem Stern $\star$ markiert sind, werden als besonders wichtig erachtet.

1.1 Jacobi-Matrix $\star$

Man bestimme die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto 3x^2y + \exp(xz^2) + 4z^3$.

Lösung

$$\begin{aligned} J_f(x) &= (\nabla f(x))^T \\ &= \begin{pmatrix} 6xy + \exp(xz^2)z^2 & 3x^2 & 2z\exp(xz^2) + 12z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Richtungsableitung $\star$

Berechne für $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ die Richtungsableitung $\partial_v f$ von f an der Stelle $x_0 = (1, 1)$ in Richtung eines Vektors $v = (-1, -1)$.

Lösung Wir berechnen den Gradienten an x_0

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) &= \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(1+x^2)^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und berechnen mit diesem die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \partial_v f(x_0) &= \nabla f(x_0) \cdot v \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3 Differenzierbarkeit $\star$

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := \sqrt{|xy|}$ im Nullpunkt partiell oder total differenzierbar?

Lösung Wir berechnen die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und analog folgt

$$\partial_y f(0, 0) = 0.$$

Die partiellen Ableitungen existieren also und f ist damit in $(0,0)$ partiell differenzierbar. Wenn f dort auch total differenzierbar ist, dann lautet die Ableitung an diesem Punkt gerade

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben durch die partiellen Ableitungen (Eindeutigkeit). Wir testen dies aus

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|f(\Delta) - f(0,0) - f'(0,0)\Delta\|}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(\Delta)}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta_1 \Delta_2|}}{\max\{\Delta_1, \Delta_2\}} \\
&\to \infty
\end{aligned}$$

Also ist f in $(0,0)$ nicht total differenzierbar.

1.4 Totale Differenzierbarkeit und Kettenregel

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) \mapsto (yz, z^2 + x)^T$ in $(1,0,-1)^T$ total differenzierbar ist mit $f'(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, g(x,y) = (x^2 + y^2, 2x, yx^2)^T$ in $f(1,0,-1) = (0,2)^T$ total differenzierbar ist mit $g'(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie die Ableitung von $g \circ f$ in $(1,0,-1)^T$.

Lösung

(a) Berechne

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|f((1,0,-1) + \Delta) - f(1,0,-1) - f'(1,0,-1)\Delta\|}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|(\Delta_2(-1+\Delta_3), (-1+\Delta_3)^2 + (1+\Delta_1))^T - (0, (-1)^2 + 1)^T - (-\Delta_2, \Delta_1 - 2\Delta_3)^T\|}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\|(\Delta_3 \Delta_2, \Delta_3^2)\|}{\|\Delta\|} \\
&\leq \lim_{\Delta \to 0} \frac{|\Delta_3| \|(\Delta_2, \Delta_3)\|}{\|(\Delta_2, \Delta_3)\|} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} |\Delta_3| = 0
\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen es wieder explizit:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\Delta\to 0} \frac{\|g((0,2)+\Delta) - g(0,2) - g'(0,2)\Delta\|}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\|(\Delta_1^2 + (2+\Delta_2)^2, 2\Delta_1, (2+\Delta_2)\Delta_1^2)^T - (2^2,0,0)^T - (4\Delta_1, 2\Delta_2, 0)^T\|}{\|\Delta\|} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\|(\Delta_1^2 + \Delta_2^2, 2(\Delta_1 - \Delta_2), \Delta_1^2(2+\Delta_2))^T\|}{\|\Delta\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies sieht man z.B. recht leicht in der Maximumsnorm.

(c) Hier verwenden wir die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Damit wird die Berechnung zu einer einfachen Matrizenmultiplikation (Reihenfolge beachten!)

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(1,0,-1) &= g'(0,2)f'(1,0,-1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.5 Totale Differenzierbarkeit vs. Richtungsableitung

Man definiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } \exists\, t \in \mathbb{R}, t \neq 0 \text{ mit } (x,y) = (t,t^2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{array} \right\}$$

Beweisen Sie:

(a) f ist im Punkte $(0,0)$ *nicht* total differenzierbar.

(b) Im Punkte $(0,0)$ ist f in jede Richtung v richtungsableitbar.

Lösung

(a) Wir zeigen, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist und damit nicht differenzierbar. Dafür betrachten wir die Folge $(t,t^2) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$, die für $t \to 0$ gegen 0 konvergiert. Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung. Die Gerade $\{\alpha v | \alpha \in \mathbb{R}\}$ schneidet die Parabel $\{(t,t^2) | t \in \mathbb{R}\}$ in höchstens zwei Punkten. Also gilt $f(hv) = 0$ mit Ausnahme von höchstens zweier Punkte $h \in \mathbb{R}$. Wir berechnen die Richtungsableitung

$$\begin{aligned}
\partial_v f(0,0) &\lim_{h\to 0} \frac{f(hv) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{h} = 0.
\end{aligned}$$

In $(0,0)$ ist f damit in jede Richtung ableitbar.

1.6 Kettenregel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige differenzierbare Abbildung. Man drücke die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) := f(te^t, t^2)$ durch die partiellen Ableitungen von f aus.

Lösung Betrachte $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (te^t, t^2)$. Damit gilt $g(t) = (f \circ \varphi)(t)$ und wir können die Kettenregel verwenden. Dazu benötigen wir noch die Jacobi-Matrix von φ

$$J_\varphi(t) = \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Nach der Kettenregel ist die Ableitung von g dann

$$\begin{aligned} g'(t) &= J_f(\varphi(t))J_\varphi(t) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f(\varphi(t)) & \partial_y f(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= (1+t)e^t \partial_x f(te^t, t^2) + 2t\partial_y f(te^t, t^2) \end{aligned}$$

1.7 Taylorentwicklung

Man berechne die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ bis zu den Gliedern einschlieẞs lich zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $\zeta = (1, 1)$.

Lösung

$$\begin{aligned} f(1,1) &= -2 \\ f'(1,1) &= \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \\ H_f(1,1) &= \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 6x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -2 + (0(x-1) - 6(y-1)) \\ &+ \tfrac{1}{2}[6(x-1)^2 - 6(y-1)(x-1) + 6(x-1)(y-1) - 6(y-1)^2 \\ &- 6(x-1)^2 + 6(y-1)(x-1) - 6(x-1)(y-1) + 6(y-1)^2] \\ &= -2 - 6y \end{aligned}$$

1.8 Taylorentwicklung mit Reihe ⋆

Man berechne die Taylorreihe in dritter Ordnung der Funktion $f(x, y, z) = y \exp(x^2 z)$ um den Punkt $(0, 0, 0)$.

Lösung Wir schreiben $f(x, y, z) = y \exp(x^2) \exp(z)$ und benutzen nun die Exponentialreihe

$$f(x,y,z) = y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Nun multiplizieren wir aus und berücksichtigen nur die Terme deren Grad nach dem Ausmultiplizieren höchstens 3 ist (z.B. yz^2 aber nicht x^2yz). Damit ergibt sich

$$f(x,y,z) = y + yz + \tfrac{1}{2}yx^2 + \tfrac{1}{2}yz^2$$

1.9 Taylor und Extrema ⋆

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(0,0) = 0$, f hat bei $(0,0)$ einen stationären Punkt und

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie, es existiert eine Umgebung U von $(0,0)$, sodass für alle $(x,y) \in U$ gilt $f(x,y) \geq x^2 + y^2$ (Tipp: Taylor-Entwicklung).

Lösung Mit den gegebenen Informationen schreiben wir die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung hin

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + (0,0)(x,y)^T + \tfrac{1}{2}\left(4x^2 + 4y^2 - xy - yx\right) + \theta(3) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(4x^2 + 4y^2 - 2xy\right) + \theta(3) \end{aligned}$$

Damit gilt $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wegen $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow -2xy \geq -x^2 - y^2$

$$f(x,y) \geq \tfrac{1}{2}(4x^2 + 4y^2 - x^2 - y^2) + \theta(3) = (x^2 + y^2)\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{\theta(3)}{x^2+y^2}\right)$$

1.10 Taylorentwicklung II

Berechnen Sie die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^y$ im Punkt $(1,1)$ und geben Sie einen Näherungswert für $1{,}05^{1{,}02}$ an (ohne Fehlerabschätzung).

Lösung Wir benutzen $x^y = \exp(\ln(x)y)$ und berechnen die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 \\ \partial_x f(1,1) &= yx^{y-1} = 1 \\ \partial_y f(1,1) &= \ln(x)x^y = 0 \\ \partial_x\partial_x f(1,1) &= y(y-1)x^{y-2} = 0 \\ \partial_y\partial_y f(1,1) &= \ln^2(x)x^y = 0 \\ \partial_x\partial_y f(1,1) &= \partial_y\partial_x f(1,1) = (y\ln(x) + 1)x^{y-1} = 1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylorentwicklung

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \theta(3)$$

da alle anderen Terme wegfallen. Es ist dann

$$1{,}05^{1{,}02} = 1 + (1{,}05 - 1) + (1{,}05 - 1)(1{,}02 - 1) = 1{,}051$$

1.11 Taylorentwicklung III

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Berechnen Sie das zugehörige Taylorpolynom in $(1,1)$.

Lösung

$$
\begin{aligned}
f(1,1) &= 0 \\
\partial_x f(1,1) &= \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} \\
\partial_y f(1,1) &= \frac{-2x}{(x+y)^2} = -\frac{1}{2} \\
\partial_x \partial_x f(1,1) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} = -\frac{1}{2} \\
\partial_y \partial_y f(1,1) &= \frac{4x}{(x+y)^3} = \frac{1}{2} \\
\partial_x \partial_y f(1,1) &= \partial_y \partial_x f(1,1) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} = 0
\end{aligned}
$$

Damit ist das Taylorpolynom

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(y-1) - \tfrac{1}{4}(x-1)^2 + \tfrac{1}{4}(y-1)^2 \\
&= x - y - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2
\end{aligned}
$$