Ferienkurs

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Probeklausur - Lösung

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Auf der z - Achse liegt ein (unendlich langer) gerader Draht mit der konstanten Ladungsdichte λ.

1. Berechnen Sie das von dieser Anordnung erzeugte elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. (3 Punkte)
2. Der geladene Draht wird nun in die x - Richtung um den Abstand $x_0 > 0$ parallel verschoben. Desweiteren befindet sind in der yz - Ebene (bei $x = 0$) eine (unendlich ausgedehnte) geerdete Metallplatte.
   (a) Bestimmen Sie mit der Methode der Spiegelladungen das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Halbraum $x > 0$ zu der vorgegebenen Randbedingung. Überprüfen Sie, dass $\vec{E}(\vec{r})$ auf der Metallplatte nur eine Normalkomponente besitzt. (3 Punkte)
   (b) Geben Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(y)$ an und berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\sigma(y)$. (2 Punkte)

Lösung:

1. gerader Draht mit homogener Linienladungsdichte λ auf z - Achse.

$$\rho(\vec{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y) \tag{1}$$

Wegen der Zylindersymmetrie ist das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\vec{e}_\rho = E(\rho)\begin{pmatrix} x/\rho \\ y/\rho \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Benutze nun den Gauß'schen Satz:

$$\oiint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r \cdot \rho(\vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dz\lambda \tag{3}$$

und als Volumen V einen Zylinder der Höhe l und Radius ρ.
Für die Stirnflächen ist $d\vec{F} \propto \vec{e}_z$:

$$\Rightarrow \iint_{Stirnfl.} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{4}$$

Für die Mantelfläche ist $d\vec{F} = rd\varphi dz = \vec{e}_\rho$:

$$\Rightarrow \iint_{Mantelfl} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi\rho E(\rho)\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = 2\pi\rho l E(\rho) \tag{5}$$

Nach dem Satz von Gauß folgt:

$$2\pi\rho l E(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^l dz\lambda = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

$$\Rightarrow E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

2. Draht vor geerdeter Metallplatte

   Aufgrund der Methode der Spiegelladungen platziert man einen Spiegeldraht parallel zur $z-$ Achse bei $y = 0$ und $x = -x_0$ mit der Linienladungsdichte $-\lambda$.
   Damit folgt für das elektrische Feld im Halbraum $x > 0$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0[(x-x_0)^2+y^2]}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0[(x+x_0)^2+y^2]}\begin{pmatrix} x+x_0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

   auf der Metallplatte bei $x = 0$ folgt:

$$\vec{E}(0,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0[x_0^2+y^2]}\begin{pmatrix} -x_0-x_0 \\ y-y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda x_0}{\pi\varepsilon_0(x_0^2+y^2)}\vec{e}_x \tag{10}$$

   Das elektrische Feld hat also nur eine Normalkomponente:

$$\vec{E}(0,y) \propto \vec{n} = \vec{e}_x \tag{11}$$

3. Die induzierte Flächenladungsdichte folgt aus dem Sprung der Normalkomponente von $\vec{E}$:

$$\sigma = \varepsilon_0\vec{n}\cdot\vec{E}|_{\text{Fläche}} = \varepsilon_0\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x\frac{2\lambda x_0}{\pi\varepsilon_0(x_0^2+y^2)} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \sigma_y = -\frac{\lambda x_0}{\pi(x_0^2+y^2)} \tag{13}$$

   Für das Integral folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} dy\frac{-\lambda x_0}{\pi(x_0^2+y^2)} = -\frac{\lambda x_0}{\pi}\frac{1}{x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2} \tag{14}$$

   Durch Substitution von $\mu = y/x_0$ lässt sich das Integral leicht lösen:

$$\frac{\lambda}{\pi}arctan\mu|_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} = -\frac{\lambda}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = -\lambda \tag{15}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine homogen geladene Kreisscheibe vom Radius R und vernachlässigbarer Dicke trägt die Gesamtladung Q und rotiert starr mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ um eine Achse senkrecht durch den Kreismittelpunkt. Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ dieser Anordnung.

Lösung:

Homogen geladene, rotierende Kreisscheibe.
Die Ladungsdichte der homogen geladenen Kreisscheibe ist:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\pi R^2}\Theta(R^2 - x^2 - y^2)\delta(z) \tag{16}$$

Mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ folgt für die Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\omega\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{Q\omega}{\pi R^2}\Theta(R^2 - x^2 - y^2)\delta(z)\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} \tag{17}$$

Damit ist das magnetische Moment der Anordnung:

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2}\int d^3r\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \\
&= \frac{Q\omega}{2\pi R^2}\int d^3r\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\Theta(R^2 - x^2 - y^2)\delta(z) \\
&= \frac{Q\omega}{2\pi R^2}\int d^3r\begin{pmatrix}-xz\\-yz\\x^2+y^2\end{pmatrix}\Theta(R^2 - x^2 - y^2)\delta(z) \\
&= \frac{Q\omega}{2\pi R^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_0^R d\rho\rho\rho^2}_{\frac{R^4}{4}}\,\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{m} = \frac{Q}{4}R^2\omega\vec{e}_z
\end{aligned} \tag{18}$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Ein (sehr langes) gerades Koaxialkabel besteht aus einem inneren, leitenden Vollzylinder vom Radius R_1 und konzentrische dazu einem leitenden Zylindermantel mit Radius $R_2 > R_1$ und vernachlässigbarer Dicke, welcher als Rückleitung dient. Die Zylinderachse liegt auf der z - Achse.

1. Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) \sim \vec{e}_z$ im Koaxialkabel an, wenn der hin- und rückfließende Strom I jeweils gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist. (Punkte 3)

2. Berechnen Sie das zugehörige (stetige) Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\vec{e}_z$ im ganzen Raum. (6 Punkte)
   Hinweis: Da die Funktion $A(\rho)$ nur vom Radius ρ abhängt, gilt für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten $\Delta A(\rho) = A''(\rho) + \frac{1}{\rho}A'(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho A'(\rho)]$.

3. Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit $\frac{L}{l}$ des Koaxialkabels. (3 Punkte)

Lösung:

1. Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \left(\frac{I}{\pi R_1^2}\Theta(R_1 - \rho) - \frac{I}{2\pi R_2}\delta(\rho - R_2)\right)\vec{e}_z \tag{19}$$

   Test durch Flächenintegral (erfüllt):

$$\int_{Querschnitt} d\vec{F}\cdot\vec{j} = \frac{I}{\pi R_1^2}\pi R_1^2 - \frac{I}{2\pi R_2}2\pi R_2 = 0 \tag{20}$$

2. Vektorpotential:

$$\begin{aligned}\vec{j} \propto \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \propto \vec{e}_z \\ &= A(\vec{r})\vec{e}_z\end{aligned} \tag{21}$$

   Wegen der Zylindersymmetrie gilt $\vec{A}(\vec{r})A(\rho)\vec{e}_z$. Aus der Maxwellgleichung $rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ folgt in Coulomb-Eichung ($div\vec{A} = 0$):

$$\mu_0\vec{j} = rot\vec{B} = rotrot\vec{A} = graddiv\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A} \tag{22}$$

   Das Vektorpotential erfüllt also die Poissongleichung:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}) \quad mit \quad \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\vec{e}_z \tag{23}$$

   Da $A(\rho)$ nur vom Abstand zur z - Achse abhängt, folgt:

$$\Delta A(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho A'(\rho)] = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\left\{\frac{\Theta(R_1-\rho)}{R_1^2} - \frac{\delta(\rho - R_2)}{2R_2}\right\} \tag{24}$$

   Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho A'(\rho)] = 0 \overset{\cdot\rho,d\rho}{\Rightarrow} \rho A'(\rho)a \tag{25}$$

$$\overset{:\rho,\int d\rho}{\Rightarrow} = A(\rho) = \int d\rho\frac{a}{\rho} = aln\rho + b \quad , \quad a, b\text{konstant} \tag{26}$$

Lösung im Bereich $\rho < R_1$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho A'(\rho)] = -\frac{\mu_0 I}{\pi R_1^2} \tag{27}$$

$$\Rightarrow \rho A'(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}\rho^2 + a \tag{28}$$

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} + a ln\rho + b \quad , \quad a, b\text{konstant} \tag{29}$$

Ansatz:

Für $\rho < R_1$:

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\rho^2 + a_1 ln\rho + b_1 \tag{30}$$

Für $R_1 < \rho < R_2$:

$$a_2 ln\rho + b_2 \tag{31}$$

Für $\rho > R_2$:

$$a_3 ln\rho + b_3 \tag{32}$$

Damit $A(0)$ endlich ist, muss $a_1 = 0$ sein.
Wir wählen $b_1 = 0$ (unbedeutende additive Konstante).
Stetige Differenzierbarkeit bei $\rho = R_1$ liefert dann:

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}R_1^2 = a_2 ln R_1 + b_2 \quad , \quad -\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}R_1 = a_2\frac{1}{R_1} \tag{33}$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \tag{34}$$

$$\Rightarrow b_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} ln R_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1 - 2 ln R_1) \tag{35}$$

Aus $\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\vec{e}_z$ folgt mit Rotation in Zylinderkoordinaten $\vec{B} = rot\vec{A} = -\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\vec{e}_\varphi = B(\rho)\vec{e}_\varphi$.
Wendet man das Ampere'sche Durchflutungsgesetz auf eine Kreisscheibe mit Radius $\rho > R_2$ an, folgt mit $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho$ und $d\vec{r} = \rho\vec{e}_\varphi$:

$$\oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi\rho B(\rho)\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi = 2\pi B(\rho) = (I - I)\mu_0 = 0 \tag{36}$$

$$\Rightarrow B(\rho) = 0 \Rightarrow A(\rho) \text{ ist konstant für } \rho > R_2,\ \text{da } B(\rho) = -A'(\rho) \tag{37}$$

$$a_3 = 0 \tag{38}$$

Stetigkeit bei $\rho = R_2$ liefert damit:

$$b_3 = a_2 ln R_2 + b_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 + 2ln\frac{R_1}{R_2}\right) \tag{39}$$

Insgesamt erhält man für das Vektorpotential:
Für $\rho < R_1$:

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2} \tag{40}$$

Für $R_1 < \rho < R_2$:

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left(1 + 2ln\frac{\rho}{R_1}\right) \tag{41}$$

Für $\rho > R_2$:

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left(1 + 2ln\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{42}$$

3. Für die Selbstinduktivität gilt allgemein:

$$L = \frac{1}{I_2}\int_V d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \tag{43}$$

Bei Translationsinvarianz folgt für die Selbstinduktivität pro Längeneinheit:

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{I^2}\iint_{\text{Querschnitt}} dF \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{L}{l} &= \frac{1}{I^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho\rho \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \\
&= \frac{1}{I^2}\frac{-\mu_0 I}{4\pi} 2\pi \int_0^{\infty} d\rho\rho \{\frac{I}{\pi R_1^2}\Theta(R_1 - \rho)\vec{e}_z \cdot \frac{\rho^2}{R_1^2}\vec{e}_z - \\
&- \frac{I}{2\pi R_2}\delta(\rho - R_2)\vec{e}_z \cdot \left(1 + 2ln\frac{R_2}{R_1}\right)\vec{e}_z\} = \\
&= -\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\int_0^{R_1} d\rho \frac{\rho^3}{R_1^4} - \frac{R_2}{2R_2}\left(1 + 2ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4}\right) \tag{46}$$

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Eine dünne Linearantenne der Länge $2d$ liegt auf der z - Achse und wird über einen schmalen Spalt in der Mitte mit Wechselstrom der Frequenz ω gespeist. Die auf den Bereich $|z| < d$ begrenzte, zeitlich periodische (komplexe) Stromdichte hat die folgende Form:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = I_0 sin(kd - k|z|)\delta(x)\delta(y)e^{i\omega t}\vec{e}_z \qquad , \qquad k = \frac{\omega}{c} \tag{47}$$

1. Füren Sie für das (komplexe) retardierte Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_z(\vec{r})e^{-i\omega t}\vec{e}_z$ die Fernwfeldentwicklung bis zur Ordnung $\frac{1}{r}$ durch und zeigen Sie, dass der räumliche Anteil durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-d}^{d} dz' sin(kd - k|z'|)exp(-ikz' cos\vartheta) \quad \equiv \quad \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{kr}F(k, \vartheta) \tag{48}$$

   Das Ergebnis $F(k, \vartheta) = \frac{cos(kdcos\vartheta) - cos(kd)}{sin^2\vartheta}$ für obiges Integral können Sie ohne Beweis und Herleitung verwenden. (4 Punkte)

2. Berechnen Sie die zugehörigen räumlichen Anteile proportional zu $\frac{1}{r}$ der magnetischen und elektrischen Fernfelder $vecB(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$. (6 Punkte)

3. Bestimmen Sie den zeitlich gemittelten Poynting-Vektro $\vec{S}_{av}(\vec{r}) = \frac{Re[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})]}{2\mu_0}$ und geben Sie die differentielle Strahlungsleistung $\frac{dP}{d\Omega}$ der Linearantenne an. (4 Punkte)

Lösung:

Mit Wechselstrom gespeiste Linearantenne.
zeitlich periodische komplexe Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = I_0 sind(kd - k|z|)\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega t}\vec{e}_z \tag{49}$$

im Bereich $|z| < d$, mit $k = \frac{\omega}{c}$.

1. Das komplexe retardierte Vektorpotential ist:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r'}, A - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r'}|)}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' I_0 sin(kd - k|z'|)\delta(x')\delta(y')\cdot \\ &\cdot e^{-i\omega t}e^{\frac{i\omega}{c}|\vec{r} - \vec{r'}|}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\vec{e}_z \end{aligned} \tag{50}$$

   Nun führt man eine Fernfeldentwickling ($r \gg r'$) durch:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = (r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\left[1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2} \tag{51}$$

Nun führen wir für den Term der Form $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$-Term eine Taylorentwicklung durch.

$$\frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right] = \frac{1}{r} + O\left(\frac{r'}{r^2}\right) \tag{52}$$

$$\begin{aligned} k|\vec{r}-\vec{r}'| &= kr\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)} = \\ &= kr\left|1 - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right] = k(r - \vec{e}_r \cdot \vec{r}') + O\left(\frac{r'^2}{r}\right) \end{aligned} \tag{53}$$

$$exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|) = exp\left[ik(r - \vec{e}_r \cdot \vec{r}') + O\left(\frac{1}{r}\right)\right] \tag{54}$$

Wegen $\delta(x')\delta(y')$ ist $x' = 0 = y'$ und es folgt:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{r}' = \begin{pmatrix} sin\vartheta cos\varphi \\ sin\vartheta sind\varphi \\ cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} = z' cos\vartheta \tag{55}$$

Damit folgt für den räumlichen Anteil des retardierten Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r},t) = A(\vec{r})e^{-i\omega t}\vec{e}_z$ in führender Ordnung der Fernfeldentwicklung:

$$\begin{aligned} A(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-d}^{d} dz' I_0 sin(kd - k|z'|)\delta(x')\delta(y') \cdot \\ &\cdot exp(ikr - ikz' cos\vartheta)\frac{1}{r} = \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-d}^{d} dz' sin(kd - k|z'|)exp(-ikz' cos\vartheta) \end{aligned} \tag{56}$$

$$\Rightarrow A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{kr}F(k,\vartheta) \tag{57}$$

Die Integration liefert:

$$\begin{aligned} F(k,\vartheta) = \frac{k}{2}\int_{-d}^{d} dz' in(kd - k|z'|)exp(-ikz' cos\vartheta) = \\ = \frac{cos(kdcos\vartheta) - cos(kd)}{sin^2\vartheta} \end{aligned} \tag{58}$$

2. Der räumliche Anteil des magnetischen Fernfeldes ist:

$$\vec{B}(\vec{r}) = rot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} rot\left[\vec{e}_z \frac{e^{ikr}}{kr} F(k,\vartheta)\right] = \\ = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} grad\left[\frac{e^{ikr}}{kr} F(k,\vartheta)\right] \times \vec{e}_z \tag{59}$$

Für den führenden Term in Fernfeld-Entwicklung darf *grad* nur auf e^{ikr} wirken, da:

$$\vec{\nabla} e^{ikr} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} e^{ikr} = ike^{ikr}\vec{e}_r \tag{60}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{61}$$

$$\vec{\nabla} F(k,\vartheta) = \frac{\partial F}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r sin\vartheta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi = O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{62}$$

Damit erhält man:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{i\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r} F(k,\vartheta)\vec{e}_r \times \vec{e}_z \tag{63}$$

Mit $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$ folgt aus $rot\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ für die räumlichen Koordinanten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ic^2}{\omega} rot\vec{B}(\vec{r}) \tag{64}$$

Es folgt also für den räumlichen Anteil des elektrischen Fernfeldes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ic^2}{\omega}\frac{i\mu_0 I_0}{2\pi} rot\left[\frac{e^{ikr}}{r} F(k,\vartheta)\vec{e}_r \times \vec{e}_z\right] \tag{65}$$

Wieder darf $\vec{\nabla}$ nur auf e^{ikr} wirken, da:

$$\vec{\nabla} e^{ikr} = ike^{ikr}\vec{e}_r \quad , \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r} O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad , \quad \vec{\nabla} F(k,\vartheta) = O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{66}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ da } \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{e}_r)_j = \frac{\delta(ij)}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} = O\left(\right) \tag{67}$$

Man bekommt also für den führenden Term:

$$\Rightarrow \vec{e}(\vec{r}) = -\frac{-ic\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r} F(k,\vartheta)\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \tag{68}$$

3. Den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor erhält man durch Einsetzen der vorher bestimmten Felder:

$$\vec{S}_{av}(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0} Re[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B} * (\vec{r})] \tag{69}$$

Dabei ist der vektorielle Anteil:

$$\begin{aligned}
[\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z)] \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = [\vec{e}_r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z - \vec{e}_z \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r] \times (\vec{e}_t \times \vec{e}_z) = \\
&= cos\vartheta \vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) - \vec{e}_z \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = \\
&= cos\vartheta (\vec{e}_r cos\vartheta - \vec{e}_z) - (\vec{e}_r \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z - \vec{e}_z \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) = \\
&= \vec{e}_r (cos^2\vartheta - 1) = -\vec{e}_r sin^2\vartheta
\end{aligned} \tag{70}$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{av} = \frac{1}{2\mu_0} Re[\frac{-ic\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} F(k,\vartheta)[\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z)] \times \\
\times \frac{-i\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} F(k,\vartheta)(\vec{e}_r \times \vec{e}_z)]
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\Rightarrow \vec{S}_{av} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r^2} F(k,\vartheta)^2 sin^2\vartheta \vec{e}_r \tag{72}$$

Damit ist die differentielle Strahlungsleistung der Linearantenne:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \vec{e}_r \cdot \vec{S}_{av}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} [sin\vartheta F(k,\vartheta)]^2 \tag{73}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{cos(kdcos\vartheta) - cos(kd)}{sin\vartheta} \right]^2 \tag{74}$$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

In großer Entfernung von einem Streukörper mit induziertem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}$ hat das gestreute Strahlungsfeld die Form:

$$\vec{E}_{Streu}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi rc} e^{i(kr-\omega t)} (\vec{m} \times \vec{e}_r) \tag{75}$$

Für einen Streukörper mit der magnetischen Polarisierbarkeit β gilt die Beziehung $\vec{m} = \frac{\beta \vec{B}_0}{\mu_0}$, wobei $\vec{B}_0$ der magnetische Amplitudenvektor der in z - Richtung einlaufenden ebenen elektromagnetischen Welle $(\vec{E}_{ein}, \vec{B}_{ein})$ ist.

1. Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pol}$ in Abhängigkeit von den Polarisationen $\vec{\varepsilon}_0$ und $\vec{\varepsilon}$ der einfallenden und gestreuten Strahlung an und vereinfachen Sie diesen Ausdruck für das gegebene Problem.
2. Berechnen Sie für die Streuung unpolarisiert einfallender Strahlung.
   Hinweis: Die richtungsabhängige Größe $|\vec{\varepsilon}^* \cdot (\vec{m} \times \vec{e}_r)|^2$ ist über die Polarisationsvektoren $\vec{\varepsilon}_{\|} = \frac{\vec{e}_z - cos\vartheta \vec{e}_r}{sin\vartheta}$ und $\vec{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}{sin\vartheta}$ der gestreuten Strahlung zu summieren.

Lösung:

Streuung elektromagnetischer Wellen an einem magnetisch polarisierbaren Streuköroer. Die gestreute Welle hat die Form:

$$\vec{E}_{Streu} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} e^{i(kr-\omega t)} \vec{m} \times \vec{e}_r \tag{76}$$

mit dem induzierten magnetischen Dipolmoment $\vec{m} = \frac{\beta}{\mu_0}\vec{B}_0$ und der magnetischen Polarisierbarkeit β.

1. Die Felder der einlaufenden ebenen Welle in z - Richtung sind:

$$\vec{E}_{ein} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad , \quad \vec{B}_{ein} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_{ein} = \frac{1}{c}\vec{e}_z \times \vec{E}_{ein} \tag{77}$$

   Der differentielle polarisationsabhängige Wirkungsquerschnitt ist:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{pol} = \frac{r^2 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{|\vec{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{E}_{ein}|^2} \tag{78}$$

   mit den Polarisationsvektoren $\vec{\varepsilon}_0, \vec{\varepsilon}$ der einfallenden / gestreuten Strahlung.
   Mit $\vec{E}_0 = E_0 \vec{\varepsilon}_0$ folgt:

$$|\vec{E}_0 \varepsilon_0^*|^2 = |E_0 \vec{\varepsilon}_0^* \vec{\varepsilon}_0|^2 = E_0^2 \tag{79}$$

   und damit:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{pol} &= \frac{r^2}{E_0^2}\left(\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r c}\right)^2 \left(\frac{\beta}{c\mu_0}\right) |[(\vec{e}_z \times \vec{\varepsilon}_0 E_0) \times \vec{e}_r] \cdot \vec{\varepsilon}^*|^2 = \\ &= \frac{\beta^2 k^4}{16\pi^2} |(\vec{e}_z \times \vec{\varepsilon}_0) \cdot (\vec{e}_r \times \vec{\varepsilon}^*)|^2 \end{aligned} \tag{80}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{pol} = \frac{\beta^2 k^4}{16\pi^2} |\vec{\varepsilon}_0 \cdot (\vec{\varepsilon}^* cos\vartheta - \vec{e}_r \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{e}_z)|^2 \tag{81}$$

2. Da die einfallende Strahlung unpolarisiiert ist, wird die Anfangspolarisation $\vec{\varepsilon}_0 = \vec{e}_x, \vec{e}_y$ gemittelt.
Allgemein gilt:

$$\sum_{\vec{\varepsilon}_0=\vec{e}_x,\vec{e}_y} |\vec{\varepsilon}_0\vec{v}|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2 = |\vec{v} \times \vec{e}_z|^2 \tag{82}$$

Es folgt für den gemittelten Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{1}{2} \sum_{\vec{\varepsilon}_0=\vec{e}_x,\vec{e}_y} \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{pol} = \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2} |(\vec{\varepsilon}^* cos\vartheta - \vec{e}_r \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{e}_z) \times \vec{e}_z|^2 \tag{83}$$

Polarisation der gestreuten Strahlung parallel zur Streuebene. Der Polarisationsvektor ist:

$$\vec{\varepsilon}_{\parallel} = \frac{\vec{e}_z - cos\vartheta\vec{e}_r}{sin\vartheta} \quad , \quad |\varepsilon_{\parallel}|^2 = 1 \quad , \quad \vec{\varepsilon}^*_{\parallel} = \vec{\varepsilon}_{\parallel} \tag{84}$$

Der gemittelte Wirkungsquerschnitt ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2} |(\vec{\varepsilon}_{\parallel} cos\vartheta - \vec{e}_r \vec{\varepsilon}_{\parallel} \vec{e}_z) \times \vec{e}_z|^2 = \\ &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2 sin^2\vartheta} |[(\vec{e}_z - cos\vartheta\vec{e}_r) cos\vartheta - \vec{e}_r(\vec{e}_z - cos\vartheta\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z] \times \vec{e}_z|^2 = \\ &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2 sin^2\vartheta} |[-cos^2\vartheta(1 - cos^2\vartheta)]\vec{e}_r \times \vec{e}_z|^2 \end{aligned} \tag{85}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2} \tag{86}$$

Polarisation der gestreuten Strahlung senkrecht zur Streuebene. Der Polarisationsvektor ist:

$$\vec{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}{sin\vartheta} \quad , \quad |\vec{\varepsilon}_{\perp}|^2 = 2 \quad , \quad \vec{\varepsilon}^*_{\perp} = \vec{\varepsilon}_{\perp} \tag{87}$$

Der gemittelte Wirkungsquerschnitt ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2} |(\vec{\varepsilon}_{\perp} cos\vartheta - \vec{e}_r \vec{\varepsilon}_{\perp} \cdot \vec{e}_z) \times \vec{e}_z|^2 = \\ &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2 sin^2\vartheta} |[(\vec{e}_r \times \vec{e}_z) cos\vartheta - \vec{e}_r(\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z] \times \vec{e}_z|^2 = \\ &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2 sin^2\vartheta} |(\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \times \vec{e}_z|^2 = \\ &= \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2 sin^2\vartheta} |\vec{e}_z cos\vartheta - \vec{e}_r|^2 \end{aligned} \tag{88}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2} cos^2\vartheta \tag{89}$$

Der gesamte gemittelte unpolarisierte Wirkungsquerschnitt ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{\beta^2 k^4}{32\pi^2}(1 + cos^2\vartheta) \tag{90}$$