Ferienkurs

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Probeklausur - Angabe

PHYSIK
DEPARTMENT

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Auf der z - Achse liegt ein (unendlich langer) gerader Draht mit der konstanten Ladungsdichte λ.

1. Berechnen Sie das von dieser Anordnung erzeugte elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. (3 Punkte)
2. Der geladene Draht wird nun in die x - Richtung um den Abstand $x_0 > 0$ parallel verschoben. Desweiteren befindet sind in der yz - Ebene (bei $x = 0$) eine (unendlich ausgedehnte) geerdete Metallplatte.
   (a) Bestimmen Sie mit der Methode der Spiegelladungen das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Halbraum $x > 0$ zu der vorgegebenen Randbedingung. Überprüfen Sie, dass $\vec{E}(\vec{r})$ auf der Metallplatte nur eine Normalkomponente besitzt. (3 Punkte)
   (b) Geben Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(y)$ an und berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dy\sigma(y)$. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine homogen geladene Kreisscheibe vom Radius R und vernachlässigbarer Dicke trägt die Gesamtladung Q und rotiert starr mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ um eine Achse senkrecht durch den Kreismittelpunkt. Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ dieser Anordnung.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Ein (sehr langes) gerades Koaxialkabel besteht aus einem inneren, leitenden Vollzylinder vom Radius R_1 und konzentrische dazu einem leitenden Zylindermantel mit Radius $R_2 > R_1$ und vernachlässigbarer Dicke, welcher als Rückleitung dient. Die Zylinderachse liegt auf der z - Achse.

1. Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) \sim \vec{e}_z$ im Koaxialkabel an, wenn der hin- und rückfließende Strom I jeweils gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist. (Punkte 3)
2. Berechnen Sie das zugehörige (stetige) Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\vec{e}_z$ im ganzen Raum. (6 Punkte)
   Hinweis: Da die Funktion $A(\rho)$ nur vom Radius ρ abhängt, gilt für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten $\Delta A(\rho) = A''(\rho) + \frac{1}{\rho}A'(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho A'(\rho)]$.
3. Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit $\frac{L}{l}$ des Koaxialkabels. (3 Punkte)

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Eine dünne Linearantenne der Länge $2d$ liegt auf der z - Achse und wird über einen schmalen Spalt in der Mitte mit Wechselstrom der Frequenz ω gespeist. Die auf den Bereich $|z| < d$ begrenzte, zeitlich periodische (komplexe) Stromdichte hat die folgende Form:

$$vec j(vec r, t) = I_0 sin(kd - k|z|)\delta(x)\delta(y)e^{i\omega t}\vec{e}_z \qquad , \qquad k = \frac{\omega}{c} \tag{1}$$

1. Füren Sie für das (komplexe) retardierte Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_z(\vec{r})e^{-i\omega t}\vec{e}_z$ die Fernwfeldentwicklung bis zur Ordnung $\frac{1}{r}$ durch und zeigen Sie, dass der räumliche Anteil durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int_{-d}^{d} dz' sin(kd - k|z'|)exp(-ikz' cos\vartheta) \quad \equiv \quad \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}F(k, \vartheta) \tag{2}$$

   Das Ergebnis $F(k, \vartheta) = \frac{cos(kdcos\vartheta) - cos(kd)}{sin^2\vartheta}$ für obiges Integral können Sie ohne Beweis und Herleitung verwenden. (4 Punkte)

2. Berechnen Sie die zugehörigen räumlichen Anteile proportional zu $\frac{1}{r}$ der magnetischen und elektrischen Fernfelder $vecB(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$. (6 Punkte)

3. Bestimmen Sie den zeitlich gemittelten Poynting-Vektro $\vec{S}_{av}(\vec{r}) = \frac{Re[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})]}{2\mu_0}$ und geben Sie die differentielle Strahlungsleistung $\frac{dP}{d\Omega}$ der Linearantenne an. (4 Punkte)

Aufgabe 5 (13 Punkte)

In großer Entfernung von einem Streukörper mit induziertem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}$ hat das gestreute Strahlungsfeld die Form:

$$\vec{E}_{Streu}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi rc}e^{i(kr - \omega t)}(\vec{m} \times \vec{e}_r) \tag{3}$$

Für einen Streukörper mit der magnetischen Polarisierbarkeit β gilt die Beziehung $\vec{m} = \frac{\beta \vec{B}_0}{\mu_0}$, wobei $\vec{B}_0$ der magnetische Amplitudenvektor der in z - Richtung einlaufenden ebenen elektromagnetischen Welle $(\vec{E}_{ein}, \vec{B}_{ein})$ ist.

1. Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{pol}$ in Abhängigkeit von den Polarisationen $\vec{\varepsilon}_0$ und $\vec{\varepsilon}$ der einfallenden und gestreuten Strahlung an und vereinfachen Sie diesen Ausdruck für das gegebene Problem.

2. Berechnen Sie für die Streuung unpolarisiert einfallender Strahlung.
   Hinweis: Die richtungsabhängige Größe $|\vec{\varepsilon}^* \cdot (\vec{m} \times \vec{e}_r)|^2$ ist über die Polarisationsvektoren $\vec{\varepsilon}_{\|} = \frac{\vec{e}_z - cos\vartheta \vec{e}_r}{sin\vartheta}$ und $\vec{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}{sin\vartheta}$ der gestreuten Strahlung zu summieren.