Übungen zum Ferienkurs Theoretische Elektrodynamik

1 Dipol vor geerdeter Platte

Ein Dipol $\vec{p} = (0, 0, p)$ liegt am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ über einer in der xy-Ebene liegenden geerdeten Metallplatte. Berechnen Sie das Potential im oberen Halbraum.(vergessen sie nicht das überprüfen der Randbedingung, dass das Potential auf der Platte verschwindet. Berechnen Sie ausserdem die Influenzierte Flächenladungsdichte.

1.1 Lösung

Um die Randbedingungen zu erfüllen setzen wir einen Spiegeldipol $\vec{p}' = \vec{p}$ an die Stelle $\vec{a}' = -\vec{a}$. Damit folgt für das Potential im oberen Halbraum:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} + \frac{\vec{p}'\cdot(\vec{r}-\vec{a}')}{|\vec{r}-\vec{a}'|^3}\right) \tag{1}$$

Überprüfen der Randbedingung:

$$\Phi(z=0) = constant \cdot (\frac{-a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}) = 0 \tag{2}$$

Nun berechnen wir noch die influenzierte Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \epsilon_0 E_z(x,y,0) = -\vec{\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z)|_{z=0} = \frac{-\rho}{4\pi}\frac{x^2+y^2-2a^2}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}(1+1) \tag{3}$$

2 Dipolstrahlung

Die Strahlung eines oszillierenden elektrischen Dipols $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}$ wird im Fernfeld durch folgende Potentiale bestimmt:

$$\vec{A} = -i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\omega\vec{p}_0 \tag{4}$$

$$\Phi = -i\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r}\vec{k}_r\cdot\vec{p}_0 \tag{5}$$

mit:

$$k = \frac{\omega}{c_0} \tag{6}$$

$$\vec{k}_r = k\frac{\vec{r}}{r} \tag{7}$$

Verifizieren Sie, dass die Felder für große r die Lorenz-Eichung erfüllen. Berechnen Sie dann in Führender Ordnung in r das E bzw das B Feld und bestimmen Sie die Polarisation der Welle. Berechnen Sie ausserdem den Poynting-Vektor.(Nehmen Sie an, dass $\vec{p}_0$ reel ist.)

2.1 Lösung

Die Lorenz-Eichung besagt:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{8}$$

Zur verifizierung berechnen wir zuerst$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -i\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-i\omega t}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p_0}\right) = i\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-i\omega t}\vec{p_0}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{p_0}\cdot\vec{k_r})e^{i(kr-\omega t)} + i\frac{\mu_0\omega}{4\pi r^2}(\vec{p_0}\cdot\vec{e_r})e^{i(kr-\omega t)} \tag{9}$$

Nun benötigen wir noch die Zeitableitung des skalaren Potentials:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{p_0}\cdot\vec{e_r})e^{i(kr-\omega t)} \tag{10}$$

Eingesetzt in die Lorenz-Eichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}) \tag{11}$$

Des Weiteren sollen die Felder berechnet werden: zuerst das B-Feld:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -i\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-i\omega t}\vec{\nabla}\times\left(\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p_0}\right) = -i\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-i\omega t}\vec{\nabla}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\vec{p_0} = \frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{k_r}\times\vec{p_0})e^{i(kr-\omega t)} + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}) \tag{12}$$

Nun das E-Feld:

$$-\vec{\nabla}\Phi = i\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}(\frac{e^{ikr}}{r}\vec{k_r}\cdot\vec{p_0}) \tag{13}$$

Nun wenden wir die Produktregel an:

$$= i\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0}k\left(\vec{\nabla}(\frac{e^{ikr}}{r^2})(\vec{r}\cdot\vec{p_0}) + \frac{e^{ikr}}{r^2}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{p_0})\right) = -\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r}\vec{k_r}(\vec{k_r}\cdot\vec{p_0} + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}) \tag{14}$$

Für den $-\partial A/\partial t$ teil ergibt sich:

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{i(kr-\omega t}}{r}\vec{p_0} \tag{15}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r}[(\vec{k_r}\times\vec{p_0})\times\vec{k_r}] + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}) \tag{16}$$

Da $(\vec{k_r}\times\vec{p_0})\times\vec{k_r} = k^2(\vec{e_r}\times\vec{p_0})\times\vec{e_r}$ senkrecht zu r ist, ist E linear polarisiert in diese Richtung.

$$\vec{S} = 1\frac{1}{\mu_0}Re\vec{E}\times Re\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\frac{\omega}{4\pi r}cos^2(kr-\omega t)(\vec{k_r}\times\vec{p_0})^2\vec{k_r} \tag{17}$$

3 Linearantenne

Eine dünne Linearantenne der Länge 2d liegt auf der z-Achse und wird über einen schmalen Spalt in der Mitte mit Wechselstrom der Frequenz ω gespeist. Die auf den Bereich $|z| < d$ begrenzte, zeitlich periodische Stromdichte hat die Form:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = I_0 sin(kd - k|z|)\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega t}\vec{e}_z \quad k = \frac{\omega}{c} \tag{18}$$

Führen Sie für das (komplexe) retardierte Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t) = A_z(\vec{r}e^{-i\omega t}\vec{e}_z$ die Fernfeldentwiklung bis zur O rdnung 1/r durch.Zeigen sie dannach, dass der räumliche Anteil durch den Ausdruck:

$$A_z(\vec{r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{kr}\frac{cos(kdcos\Theta) - cos(kd)}{sin^2\Theta} \tag{19}$$

(Hinweis: $2sinacosb = sin(a+b) + sin(a-b)$)

3.1 Lösung

Siehe Lösung der Probeklausur dieses Ferienkurses

4 Streuung an einer dielektrischen Kugel

Sei $\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 \vec{E_0}$ mit einer polarisierten Welle $\vec{E_0} = E_0 \cdot \epsilon_p\vec{o}l$. Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt.

4.1 Lösung

Siehe Vorlesung Prof. Kaiser