Ferienkurs

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Übungsblatt 2

1 Stromdurchflossener Draht

Lösen Sie die Feldgleichung $\Delta\vec{A} = -4\pi\vec{j}/c$ für einen unendlich langen, zylindrischen Draht (Radius R), der homogen vom Strim I durchflossen wird. Geben Sie das dazugehörige $\vec{B}$ - Feld an.

Lösung:

Wir wählen Zylinderkoordinaten mit der z - Achse als Symmetrieachse des Drahts. Die Stromdichte ist dann:

Für $\rho \leq R$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{e}_z \cdot \frac{I}{\pi R^2} \tag{1}$$

Für $\rho > R$:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{e}_z \cdot 0 \tag{2}$$

Wegen $\vec{j} = j(\rho)\vec{e}_z$ ist das Vektorpotential parallel zur z - Richtung, $\vec{A} = A(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z$. Wegen der Translations- und Rotationssymmetrie gilt dann $\vec{A} = A(\rho)\vec{e}_z$. Da der Vektor $\vec{e}_z$ konstant ist, kann er auf beiden Seiten von $\Delta\vec{A} = -4\pi\vec{j}/c$ gekürzt werden (das ginge zum Beispiel nicht für $\vec{e}_\varphi$). Der Laplaceoperator reduziert sich auf Ableitungen nach ρ also:

Für $\rho \leq R$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right) = -\frac{4I}{cR^2} \tag{3}$$

Für $\rho > R$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA(\rho)}{d\rho}\right) = 0 \tag{4}$$

Dies wird zunächst unabhängig voneinander in den beiden Bereichen integriert:

Für $\rho \leq R$:

$$\frac{dA(\rho)}{d\rho} = -\frac{2I\rho}{cR^2} + \frac{c_1}{R} \tag{5}$$

$$A(\rho) = -\frac{I}{c}\frac{\rho^2}{R^2} + c_1 ln\frac{\rho}{R} + d_1 \tag{6}$$

Für $\rho > R$:

$$\frac{dA(\rho)}{d\rho} = \frac{c_2}{\rho} \tag{7}$$

$$A(\rho) = c_2 ln\frac{\rho}{R} + d_2 \tag{8}$$

Wegen $ln(\rho/R) = ln\rho - lnR$ entspricht der Faktor R im Logarithmus einer Änderung der Integrationskonstanten. Wegen der REgularität bei $\rho = 0$ ist $c_1 = 0$. Eine Konstante kann willkürlich gewählt werden, wir setzen $d_2 = 0$. Dann verschwindet das Vektorpotential auf der Zylinderoberfläche, $A(R) = 0$.
Die Stromdichte hat einen Sprung bei $\rho = R$. Damit Gleichung (3) erfüllt ist, muss die zweite Ableitung von $A(\rho)$ ebenfalls einen Sprung haben. Daher sind die erste Ableitung $A'(\rho)$ und die Funktion $A(\rho)$ selbst stetig. Die Stetigkeit von $A(\rho)$ bei R egibt $d_1 = I/c$, die Stetigkeit von $A'(\rho)$ führt zu $c_2 = -2I/c$. Damit erhalten wir:

Für $\rho \leq R$:

$$A(\rho) = \frac{I}{c} \cdot 1 - \frac{\rho^2}{R^2} \tag{9}$$

Für $\rho > R$:

$$A(\rho) = \frac{I}{c} \cdot -2ln\frac{\rho}{R} \tag{10}$$

Hiermit berechnen wir noch das Magnetfeld $\vec{B} = rot\vec{A}$:

Für $\rho \leq R$:

$$\vec{B} = -A'(\rho)\vec{e}_\varphi = \frac{2I}{c}\vec{e}_\varphi \cdot \frac{\rho}{R^2} \tag{11}$$

Für $\rho > R$:

$$\vec{B} = -A'(\rho)\vec{e}_\varphi = \frac{2I}{c}\vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho} \tag{12}$$

2 Lokalisierte Stromverteilung

Die Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ sei räumlich begrenzt. Leiten Sie:

$$\int d^3r\vec{j}(\vec{r}) = 0 \tag{13}$$

aus $div\vec{j}(\vec{r}) = 0$ ab. Verwenden Sie dazu $\vec{j} = (\vec{j} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$.

Lösung:

Wir setzen $\vec{j}(\vec{r}) = (\vec{j} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$ und integrieren partiell:

$$\int d^3r\vec{j}(\vec{r}) = \int d^3r(\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = -\int d^3r\vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})) = 0 \tag{14}$$

Die Randterme fallen weg, da die Stromverteilung lokalisiert ist.

3 Kleiner Permanentmagnet

Ein kleiner Permanentmagnet (Dipolmoment $\vec{\mu}$) ist bei $\vec{d} = d\vec{e}_x$ so gelagert, dass er sich innerhalb der $x - y-$ Ebene frei drehen kann. Auf den Magnnet wirkt ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_x$.
In welche Richtung zeigt $\vec{\mu}$ im Gleichgewicht? In welche Richtung zeigt $\vec{\mu}$ im Gleichgewicht, wenn es zusätlich noch einen Draht mit der Stromdichte $\vec{j} = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$ gibt?

Lösung:

Die potentielle Energie eines magnetischen Dipols μ im äußeren magnetischen Feld $\vec{B}$ ist $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Ein drehbar gelagerter magnetische Dipol stellt sich im Gleichgewicht so ein, dass W minimal wird. Die ist der Fall, wenn $\vec{\mu}$ in die Richtung von $\vec{B}$ zeigt. Für $\vec{B} = \vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ zeigt $\vec{\mu}$ (oder die Kompassnadel) also in x - Richtung.
Der stromdurchflossene Draht bewirkt das zusätliche Magnetfeld:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{2I}{c\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{2I}{c\rho}\begin{pmatrix} -sin\varphi \\ cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2I}{c}\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Am Ort $\vec{d} = (d, 0, 0)$ des Dipols ist das wirksame Magnetfeld dann:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{d}) = B_0\vec{e}_x + \frac{2I}{cd}\vec{e}_y \tag{16}$$

Der Magnet stellt sich parallel zu $\vec{B}$ ein. er bildet damit den Winkel:

$$\alpha = arctan\frac{2I}{cdB_0} \overset{\alpha \ll 1}{\approx} \frac{2I}{cdB_0} \tag{17}$$

zur x - Achse. Für kleine Winkel ist die Ablenkung proportional zur Stromstärke. Die Anordnung eignet sich als Strommessgerät (Amperemeter).

4 Oberflächenströme der homogen magnetisierten Kugel

Das Magnetfeld:

Für $r < R$:

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_z \tag{18}$$

Für $r > R$:

$$\vec{B} = \frac{r\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\mu}) - \vec{\mu}r^2}{r^5} \tag{19}$$

gehört zu einer homogen magnetisierten Kugel mit dem Dipolmoment $\vec{\mu} = \mu\vec{e}_z$. In den Bereichen $r < R$ und $r > R$ gelten jeweils $div\vec{B} = 0$ und $rot\vec{B} = 0$. Als Quellen des Feldes kommen daher

nur Ströme auf der Oberfläche in Frage.
Wegen der Zylindersymmetrie sind die Oberflächenströme von der From:

$$\vec{j} = \frac{I(\vartheta)}{\pi R}\delta(r-R)\vec{e}_\varphi \tag{20}$$

Bestimmen Sie den Strom $I(\vartheta)$ und das magnetische Moment μ. Leiten Sie dazu aus den Feldgleichungen folgende Beziehungen ab:

$$B_r(R+\varepsilon) - B_r(R-\varepsilon) = 0 \tag{21}$$

$$B_\vartheta(R+\varepsilon) - B_\vartheta(R-\varepsilon) = \frac{4\pi}{c}\frac{I(\vartheta)}{\pi R} \tag{22}$$

Lösung:

Wir betrachten ein kleines Volumenelement an der Kugeloberfläche, das von den Flächenelemenen $d\vec{A} = (R+\varepsilon)^2 sin\vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$ und $-(R-\varepsilon)^2 sin\vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$ begrenzt ist (mit $\varepsilon \to 0$). Aus $div\vec{B} = 0$ (gilt überall, auch bei $r \approx R$) folgt $\oint_A d\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$. Hieraus ergibt sich sofort $B_r(R+\varepsilon) - B_r(R-\varepsilon) = 0$.

$$(B_\vartheta(R+\varepsilon) - B_\vartheta(R-\varepsilon))Rd\vartheta = \frac{4\pi}{c}\frac{I(\vartheta)}{\pi R}\int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} drrd\vartheta\delta(r-R) = \frac{4I(\vartheta)}{c}d\vartheta \tag{23}$$

Hieraus folgt zweite obige Gleichung. Die sphärischen Komponenten des gegebenen Magnetfelds sind:

Für $r \leq R$:

$$B_r B_0 cos\vartheta \quad , \quad B_\vartheta = -B_0 sin\vartheta \quad , \quad B_\varphi = 0 \tag{24}$$

Für $r > R$:

$$B_r = 2\mu cos\vartheta/r^3 \quad , \quad B_\vartheta = \mu sin\vartheta/r^3 \quad , \quad B_\varphi = 0 \tag{25}$$

Wenn wir dies in unsere Ausgangsgleichungen einsetzen erhalten wir das magnetische Moment und den Oberflächenstrom:

$$\mu = \frac{1}{2}B_0R^3 \quad , \quad I(\vartheta) = \frac{cR}{4}\left(\frac{\mu}{R^3} + B_0\right)sin\vartheta = \frac{3c\mu}{4R^2}sin\vartheta \tag{26}$$

5 Dicht gewickelte Spule

Gegeben sei eine sehr dicht gewickelte Spule der Länge L (Spulenradius R, Windungszahl n), die vom Gleichstrom I durchflossen wird.

1. Berechnen Sie die magnetische Induktion auf der Achse (z - Richtung).

2. Diskutieren Sie die Grenzfälle $L \gg R$ und $L \ll R$.
3. Berechnen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ der Spule.
4. Wie sieht die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r})$ in großer Entferungn vom Spulenmittelpunkt aus?

Lösung

1. Bio Savart Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r'}) \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{27}$$

mit:

$$\vec{r} = (0, 0, z) \quad , \quad \vec{r'} = (Rcos\varphi, Rsin\varphi, z') \tag{28}$$

Zahl der Windungen auf dz': $\frac{n}{L}$ dz'
Stromdichte einer WIndung (q: Leiterquerschnitt):

$$\vec{j}(\vec{r'}) \rightarrow \frac{I}{q} \vec{e}_{varphi} \quad , \quad d^3r' = qRd\varphi \tag{29}$$

Superpositionsprinzip:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \frac{I}{q} qR \int_0^{2\pi} \vec{e}_{varphi} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} d\varphi \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi &= (\vec{r} - \vec{r'}) = (-sin\varphi cos\varphi, 0) \times (-Rcos\varphi, -Rsin\varphi, z - z') = \\ &= ((z - z')cos\varphi, (z - z')sin\varphi, R) \end{aligned} \tag{31}$$

$$|\vec{r} - \vec{r'}|^3 = (R^2 + (z - z')^2)^{3/2} \tag{32}$$

$$\int_0^{2\pi} cos\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} sin\varphi d\varphi = 0 \tag{33}$$

Für Punkte $\vec{r}$ außerhalb der Achse ist das Integral nicht elementar lösbar! Auf der z - Achse gilt:

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 nIR}{2L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \frac{1}{(^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \\ &= \frac{\mu_0 nIR^2}{2L} \vec{e}_z \frac{-(z - z')}{R^2 \sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \\ &= \mu_0 \frac{nI}{2L} \vec{e}_z \left(\frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

Speziell:

$$B_z(0) = \mu_0 \frac{nI}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \tag{35}$$

$$B_z\left(\pm\frac{L}{2}\right) = \mu_0 \frac{nI}{\sqrt{4R^2 + 4L^2}} \tag{36}$$

2. Innerhalb der Spule $\left(|z| < \frac{L}{2}\right)$:
   Für $L \ll R$:

$$B_z \approx \mu_0 \frac{n}{L} I \tag{37}$$

   Für $L \gg R$:

$$B_z \approx \mu_0 \frac{n}{2R} I \tag{38}$$

   Für außerhalb der Spule:
   Für $|z| \gg L, R$:

$$B_z \approx 0 \tag{39}$$

   Für $|z| \gg L \gg R$:

$$\begin{aligned}
B_z &= \pm\mu_0 \frac{nI}{2L}\left[\left(1 + \frac{R^2}{(z+L/2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{R^2}{(z-L/2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \simeq \\
&\simeq \pm\mu_0 \frac{nI}{2L}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2R}{2z+L}\right)^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2R}{2z-L}\right)^2\right] = \\
&= \pm\mu_0 \frac{nIR^2}{L}\left[\frac{1}{(2z-L)^2} - \frac{1}{2z+L}\right] = \\
&= \pm\mu_0 \frac{nIR^2}{4Lz^2}\left[\left(1 - \frac{L}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{L}{2z}\right)^{-2}\right] \simeq \\
&\simeq \pm\mu_0 \frac{nIR^2}{4Lz^2}\left(1 + \frac{L}{z} - 1 + \frac{L}{z}\right)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\Rightarrow B_z \approx \pm\mu_0 \frac{nIR^2}{2z^3}$$

3. Magnetisches Moment:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))d^3r' \tag{41}$$

   Wie in 1:

$$\vec{m} = \frac{n}{2L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \frac{I}{q} qR \int_0^{2\pi} (\vec{r}' \times \vec{e}_\varphi) d\varphi \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}' \times \vec{e}_\varphi &= (Rcos\varphi, Rsin\varphi, z') \times (-sin\varphi, cos\varphi, 0) = \\ &= (\underbrace{-z'cos\varphi, -z'sin\varphi}_{\text{kein Betrag zu } \vec{m}}, R)\end{aligned} \tag{43}$$

Damit:

$$\vec{m} = |fracnIR^2 2L\vec{e}_z \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi = nI(\pi R^2)\vec{e}_z \tag{44}$$

4. Dipolfeld:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right) \tag{45}$$

Auf der Spulenachse ($\vec{r} = \vec{e}_z$) und mit dem Ergebnis aus 3:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{nIR^2}{2|z|^3}\vec{e}_z \tag{46}$$

6 Helmholtz-Spulen

Zwei parallele kreisförmige Leiterschleifen werden beide vom Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Die Kreise liegen parallel zur $x-y-$ Ebene, sie haben beide den Radius R und ihre Mittelpunkte liegen bei $(x, y, z) = (0, 0, b)$ und $(0, 0, -b)$.
Bestimmen Sie das Vektorpotential der einzelnen Leiterschleifen. Entwickeln Sie das Vektorpotential in der Nähe des Koordinatenursprungs bis zur Ordnung $O(\rho^3, \rho z^2)$. Welche Beziehung muss zwischen dem Radius R und dem Abstand $D = 2b$ der Kreise gelten, damit das Magnetfeld in diesem Bereich möglichst homogen ist?

Lösung:

$$A(\rho, z) = \frac{IR}{c}\int_0^{2\pi}\left[\frac{cos\varphi'}{\sqrt{\rho^2 + R^2 + (z-b)^2 - 2\rho cos\varphi'}} + \frac{cos\varphi'}{\rho^2 + R^2 + (z+b)^2 - 2\rho cos\varphi'}\right] \tag{47}$$

Für $^rho \ll R$ und $z \ll b$ wird der Integrand bis zur geforderten Ordnung entwickelt. In der anschließenden Winkelintegration:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' cosn\varphi' = \frac{2\pi}{2^n}\binom{n}{n/2} \tag{48}$$

überleben nur die geraden Potenzen des Cosinus. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} A(\rho, z) &= 2\pi \frac{IR}{c} \frac{\rho R}{(R^2+b^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\rho^2 + z^2}{(R^2+b^2)^2} + \frac{15}{8} \frac{\rho^2 R^2 + 4b^2 z^2}{(R^2+b^2)^2} + O(\rho^4, z^4) \right] = \\ &= 2\pi \frac{IR^2}{c} \frac{\rho}{(R^2+b^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3}{8} \frac{R^2 - 4b^2}{(R^2+b^2)^2} (\rho^2 + 4z^2) + O(\rho^4, z^4) \right] \end{aligned} \tag{49}$$

Mit der Wahl $R = D = 2b$ fällt der zweite Term in der Klammer weg und das Vektorpotential vereinfacht sich zu:

$$A(\rho, z) \approx \frac{16\pi I}{5\sqrt{5}cR} \rho \tag{50}$$

Das Magnetfeld ist dann weitgehend homogen:

$$\vec{B} =\approx B_z \vec{e}_z \quad , \quad B_z \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A) \approx \frac{32\pi I}{5\sqrt{5}cR} \tag{51}$$

7 Magnetische Momente

Berechnen Sie die magnetischen Momente der folgenden Systeme.

1. Vollkugel (Radius R, Ladung Q), die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine raumfeste Achse durch den Kugelmittlepunkt rotiert.
2. Hohlkugel (Radius R) mit der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \delta(r - R) cos^2 \vartheta \tag{52}$$

   die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine raumfeste Achse durch den Kugelmittelpunkt rotiert ($\vartheta = \measuredangle(\vec{\omega}, \vec{r})$).

Lösung:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times /vec j(\vec{r})) d^r r \tag{53}$$

1. Vollkugel:

   Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3} \Theta(r - R) \tag{54}$$

   Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{55}$$

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \tag{56}$$

$\vec{\omega}$ parallel Polarachse: $\omega = \omega \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{3Q}{8\pi R^3} \int \Theta(r-R)(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}r\omega cos\vartheta)d^3r = \\ &= \frac{3Q}{8\pi R^3}\left(\vec{\omega}4\pi \int_0^R r^4 dr - \omega \int r^2 \Theta(r-R) cos\vartheta(sin\vartheta sin\varphi, sin\vartheta cos\varphi cos\vartheta)d^3r\right) \end{aligned} \tag{57}$$

$x-$ und $y-$ Komponente des zweiten Integrals liefern offensichtlich keinen Beitrag. Es bleibt deshalb:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{3Q}{8\pi R^3}\vec{\omega}\left(4\pi\frac{R^5}{5} - 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_{-1}^1 dcos\vartheta cos^2\vartheta\right) = \\ &= \frac{3QR^2}{40\pi}\vec{\omega}\left(4\pi - 2\pi \cdot \frac{2}{3}\right) \end{aligned} \tag{58}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{5}QR^2\vec{\omega} \tag{59}$$

2. inhomogen geladene Hohlkugel:
wie in 1.

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma_0 \delta(r-R)cos^2\vartheta(\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2}\sigma_0 \int d^3r\delta(r-R)cos^2\vartheta(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) = \\ &= \frac{1}{2}\sigma_0 R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dcos\vartheta cos^2\vartheta(\vec{\omega}\omega cos\vartheta\vec{e}_r) = \\ &= \frac{1}{2}\sigma_0 R^4 2\pi \int_{-1}^1 dcos\vartheta cos^2\vartheta(\vec{\omega} - \omega cos\vartheta(0,0,cos\vartheta)) = \\ &= \pi\sigma_0 R^4 \vec{\omega} \int_{-1}^1 dcos\vartheta(cos^2\vartheta - cos^4\vartheta) \end{aligned} \tag{61}$$

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{15}\sigma_0 R^4 \vec{\omega} \tag{62}$$

Gesamtladung:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r\sigma_0\delta(r-R)cos^2\vartheta = \\ &= 2\pi\sigma_0 R^2 \int_{-1}^1 dcos\vartheta cos^2\vartheta = \\ &= \frac{4\pi}{3}\sigma_0 R^2 \end{aligned} \tag{63}$$

$$sigma_0 = \frac{3Q}{4\pi}\frac{1}{R^2} \tag{64}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{5}QR^2\vec{\omega} \tag{65}$$