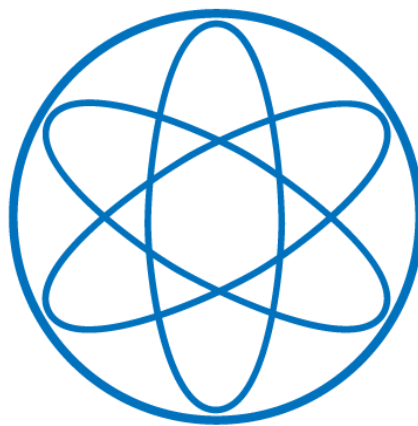


**Ferienkurs**

# **Theoretische Physik: Elektrodynamik**

**Übungsblatt 1**



**PHYSIK  
DEPARTMENT**

## 1 Verifikation des Stokesschen Satzes

Verifizieren Sie den Stokeschen Satz für das Vektorfeld:

$$\vec{V} = (4x/3 - 2y)\vec{e}_x + (3y - x)\vec{e}_y \quad (1)$$

und die Fläche:

$$A = \{\vec{r} : (x/3)^2 + (y/2)^2 \leq 1, z = 0\} \quad (2)$$

Lösung:

Zunächst berechnet man  $\text{rot}\vec{V} = (\partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y)\vec{e}_z = \vec{e}_z$ . Die Fläche ist eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = 3$  und  $b = 2$ . Damit wird die linke Seite des Stokeschen Satzes zu:

$$\int_A d\vec{A} \cdot \text{rot}\vec{V} = \int_A dA = \pi ab = 6\pi \quad (3)$$

Um das Wegintegral auf der rechten Seite zu berechnen, parametrisieren wir den Weg:

$$\vec{r} = 3\cos\alpha\vec{e}_x + 2\sin\alpha\vec{e}_y, \quad d\vec{r} = (-3\sin\alpha\vec{e}_x + 2\cos\alpha\vec{e}_y)d\alpha \quad (4)$$

Der Weg (Ellipse) wird durchlaufen, wenn  $\alpha$  die Werte von 0 bis  $2\pi$  annimmt. Längs des Weges ist das Vektorfeld  $\vec{V} = (4\cos\alpha - 4\sin\alpha)\vec{e}_x + (6\sin\alpha - 3\cos\alpha)\vec{e}_y$ . Damit wird das Wegintegral zu:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{V} = \int_0^{2\pi} d\alpha (12\sin^2\alpha - 6\cos^2\alpha) = 6\pi \quad (5)$$

Beide Integrale sind gleich. Damit haben wir den Stokeschen Satz in diesem speziellen Fall verifiziert.

## 2 Verifikation des Gaußschen Satzes

Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld:

$$\vec{V} = ax\vec{e}_x + by\vec{e}_y + cz\vec{e}_z \quad (6)$$

und die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

Lösung:

Zunächst berechnet man  $\text{div}\vec{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z = a + b + c$ . Damit wird die linke Seite des Gaußschen Satzes zu:

$$\int_V dV\vec{V} = (a + b + c) \int_{r \leq R} d^3r = \frac{4\pi}{3}R^3(a + b + c) \quad (7)$$

Für das Flächenintegral auf der rechten Seite verwenden wir Kugelkoordinaten:

$$d\vec{A} = R^2 d\cos\vartheta d\varphi \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{V} R(a\sin^2\vartheta \cos^2\varphi + b\sin^2\vartheta \sin^2\varphi + c\cos^2\vartheta) \quad (8)$$

Die  $\varphi$ -Integration über  $\cos^2\varphi$  und  $\sin^2\varphi$  liefert  $\pi$ . Damit wird das Flächenintegral zu:

$$\oint_A d\vec{A} \cdot \vec{V} = 2\pi R^3 \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \left[ \frac{a+b}{2}(1 - \cos^2\vartheta) + \cos^2\vartheta \right] = \frac{4\pi}{3} R^3 (a + b + c) \quad (9)$$

Beide Integrale sind gleich. Damit haben wir den Gaußschen Satz in diesem speziellen Fall verifiziert.

### 3 Rechnen mit Gradient, Divergenz und Rotation

Zeigen Sie  $\text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot \text{rot}\vec{V} - \vec{V} \cdot \text{rot}\vec{W}$  durch Auswertung in kartesischen Komponenten. Werten Sie analog dazu die Ausdrücke  $\text{rot}(\Phi\vec{V})$ ,  $\text{rot}(\vec{V} \times \vec{W})$  und  $\text{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W})$  aus,

Lösung:

In kartesischen Koordinaten erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{V} \times \vec{W}) &= \sum_{i,j,k} \partial_i (\varepsilon_{ijk} V_j W_k) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} (W_k \partial_i V_j - V_j \partial_i W_k) = \\ &= \vec{W} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot \text{rot}\vec{V} - \vec{V} \cdot \text{rot}\vec{W} \end{aligned} \quad (10)$$

Dabei ist  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Analog dazu berechnen wir:

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\Phi\vec{V}))_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\Phi V_k) = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\Phi \partial_j V_k + V_k \partial_j \Phi) = \\ &= \Phi (\text{rot}\vec{V})_i - (\vec{V} \times \text{grad}\Phi)_i \end{aligned} \quad (11)$$

In der folgenden Umformung wird die Kontraktion zweier total antisymmetrischer Tensoren verwendet:

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\vec{V} \times \vec{W}))_i &= \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{klm} \partial_j (V_l W_m) = \sum_{j,k,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (W_m \partial_j V_l + V_l \partial_j W_m) = \\ &= \sum_j (W_j \partial_j V_i + V_i \partial_j W_j - W_i \partial_j V_j - V_j \partial_j W_i) = \\ &= [(\vec{W} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - \vec{W}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) - (\vec{V} \cdot \vec{W})\vec{\nabla}]_i \end{aligned} \quad (12)$$

Die Auswertung von  $\text{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W})$  erfolgt nach der Produktregel:

$$(\text{grad}(\vec{V} \cdot \vec{W}))_i = \sum_j \partial_j (V_j W_i) = \sum_j [V_j (\partial_j W_i) + W_j (\partial_j V_i)] \quad (13)$$

## 4 Ladungsdichte für Kugelschale und Kreisscheibe

Eine Kugelschale und eine Kreisscheibe (beide infinitesimal dünn, und mit dem Radius  $R$ ) sind homogen geladen (Gesamtladung  $q$ ). Geben Sie für beide Fälle die Ladungsdichte an (mit Hilfe von  $\delta$ - und  $\Theta$ -Funktionen).

Lösung:

Für die Kugelschale verwenden wir Kugelkoordinaten,  $\rho(\vec{r}) = \rho(r, \vartheta, \varphi)$ . Eine homogene Ladungsverteilung impliziert sphärische Symmetrie, also  $\rho(r)$ . Die Vorgabe infinitesimal dünn bedeutet dann  $\rho(\vec{r}) = c_1 \delta(r - R)$ . Die Konstante  $c_1$  folgt aus:

$$q = \int d^3 r \rho(\vec{r}) = 4\pi c_1 \int_0^\infty dr r^2 \delta(r - R) = 4\pi c_1 R^2 \quad (14)$$

Damit ist die Ladungsdichte der Kugelschale:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \quad (15)$$

Für die Kreisscheibe verwenden wir Zylinderkoordinaten,  $\rho(\vec{r}) = \rho(p, \varphi, z)$ . Eine homogene Ladungsverteilung impliziert, dass  $\rho$  nicht von  $\varphi$  und im Inneren der Scheibe nicht von  $p$  abhängt. Die Begrenzung auf  $p \leq R$  wird durch den Faktor  $\Theta(R - p)$ , die Vorgabe infinitesimal dünn durch den Faktor  $\delta(z)$  berücksichtigt, also  $\rho = c_2 \Theta(R - p) \delta(z)$ . Die Konstante  $c_2$  folgt aus:

$$q = \int d^3 r \rho(\vec{r}) = 2\pi c_2 \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dz \Theta(R - p) \delta(z) = \pi c_2 R^2 \quad (16)$$

Damit ist Ladungsdichte der Kreisscheibe:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{4}{\pi R^2} \Theta(R - p) \delta(z) \quad (17)$$

## 5 Homogen geladene Kugel

Bestimmen Sie das elektrostatische Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (18)$$

für eine homogen geladene Kugel (Ladung  $q$ , Radius  $R$ ). Legen Sie dazu  $\vec{r}$  in  $z$  Richtung und führen Sie die Integration in Kugelkoordinaten aus. Berechnen Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$ .

Lösung:

Mit  $\vec{r} = r \vec{e}_z$  und der homogenen Ladungsdichte  $\rho_0 = \frac{q}{V}$  mit  $V = \frac{4\pi}{3} R^3$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= 2\pi\rho_0 \int_0^R dr' r'^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} = \\ &= \frac{2\pi\rho}{r} \int_0^R dr' r' (|r + r'| - |r - r'|)\end{aligned}\quad (19)$$

Die Fälle  $r > R$  und  $r \leq R$  werden getrennt ausgewertet:

Für  $r \leq R$ :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{r} \left[ \int_0^r dr' r'^2 + r \int_r^R dr' r' \right] = 4\pi\rho_0 \left( \frac{R^2}{6} - \frac{r^2}{6} \right) \quad (20)$$

Für  $r > R$ :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{r} \int_0^R dr' r'^2 = \frac{4\pi\rho_0}{r} \frac{R^3}{3} \quad (21)$$

Damit lautet das Potential der homogen geladenen Kugel:

Für  $r \leq R$ :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (22)$$

Für  $r > R$ :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} \quad (23)$$

Das dazugehörige Feld ist:

Für  $r \leq R$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \frac{qr}{R^3} \vec{e}_r \quad (24)$$

Für  $r > R$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (25)$$

## 6 Homogen geladener Kreiszyylinder

Bestimmen Sie das elektrische Feld eines homogen geladenen unendlich langen Kreiszyinders (Radius  $R$ , Länge  $L$ , Ladung/Länge =  $q/L$ ,  $L \rightarrow \infty$ ). Lösen sie das Problem:

1. mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes.

2. über die Poisson-Gleichung.

Beachten Sie, dass das Potential im Unendlichen nicht verschwindet.

Lösung:

Wir verwenden Zylinderkoordinaten  $\rho, \varphi$  und  $z$ . Die homogene Ladungsdichte im Bereich des Zylinders ist  $\rho_0 = \frac{q}{\pi R^2 L}$ . Wegen der Symmetrie des Problems kann das Potential nur vom Abstand  $\rho$  von der Zylinderachse abhängen, also  $\Phi = \Phi(\rho)$ . Dann ist das elektrische Feld von der Form  $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$ .

Das Gaußsche Gesetz wenden wir auf einen Zylinder mit dem Radius  $\rho$  und der Länge  $L$  an. Die Zylinderoberfläche besteht zum einen aus der Boden- und Deckfläche, und zum anderen aus der Mantelfläche. Im Bereich der Boden- und Deckfläche ist das Flächenelement  $d\vec{A} \propto \pm\vec{e}_z$ , sodass  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ . Auf der Mantelfläche ist  $d\vec{A} = \rho d\varphi dz \vec{e}_\rho$ . Damit erhalten wir:

Für  $\rho \leq R$ :

$$\oint_A d\vec{A} \cdot \vec{E} = 2\pi\rho LE(\rho) = 4\pi Q_V = 4\pi\rho_0 \cdot \pi\rho^2 L \quad (26)$$

Für  $\rho > R$ :

$$\oint_A d\vec{A} \cdot \vec{E} = 2\pi\rho LE(\rho) = 4\pi Q_V = 4\pi\rho_0 \cdot \pi R^2 L \quad (27)$$

Daraus ergibt sich das gesuchte elektrische Feld:

Für  $\rho \leq R$ :

$$E(\rho) = \frac{2q}{L} \cdot \frac{\rho}{R^2} \quad (28)$$

Für  $\rho > R$ :

$$E(\rho) = \frac{2q}{L} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (29)$$

Als Alternative gehen wir von der Poissongleichung aus. Für  $\Phi(\rho)$  wird die Poissongleichung zu der gewöhnlichen Differentialgleichung:

Für  $\rho \leq R$ :

$$\frac{1}{\rho}(\rho\Phi'(\rho'))' = -4\pi\rho_0 \quad (30)$$

Für  $\rho > R$ :

$$\frac{1}{\rho}(\rho\Phi'(\rho'))' = 0 \quad (31)$$

Die zweimalige Integration ergibt:

Für  $\rho \leq R$ :

$$\Phi(\rho) = -\pi\rho_0\rho^2 + c_1 \ln \frac{\rho}{R} + d_1 \quad (32)$$

Für  $\rho > R$ :

$$\Phi(\rho) = c_2 \ln \frac{\rho}{R} + d_2 \quad (33)$$

Für  $\rho > R$  liefert die Integration zunächst  $\ln(\rho) + \text{const.}$ . Dies kann durch  $\ln(\rho/R) + \text{const.} + \ln(R)$  ersetzt werden, also durch  $\ln(\rho/R)$  und eine andere Integrationskonstante. Für eine homogene Ladungsdichte darf das Potential bei  $\rho = 0$  nicht singular werden. Daher gilt  $c_1 = 0$ . Da das Potential nur bis auf eine Konstante festliegt, kann  $d_2 = 0$  gewählt werden.

Die Ladungsdichte hat bei  $\rho = R$  einen Sprung. Damit hat auch die zweite Ableitung  $\Phi''(\rho)$  einen Sprung, nur so kann die Poissongleichung erfüllt werden. Damit sind aber  $\Phi'(\rho)$  und  $\Phi(\rho)$  an dieser Stelle stetig. Diese Bedingungen ergeben  $d_1 = \pi\rho_0 R^2 = \frac{q}{L}$  und  $c_2 = -2\pi\rho_0 R^2 = -\frac{2q}{L}$ . Damit erhalten wir für das Potential des unendlich langen homogen geladenen Zylinders:

Für  $\rho \leq R$ :

$$\Phi(\rho) = \frac{q}{L} \left( 1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \quad (34)$$

Für  $\rho > R$ :

$$\Phi(\rho) = -\frac{2q}{L} \ln \frac{\rho}{R} \quad (35)$$

Das elektrische Feld:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi(\rho) = -\Phi'(\rho)\vec{e}_\rho = E(\rho)\vec{e}_\rho \quad (36)$$

stimmt mit dem zuvor errechneten elektrischen Feld überein.

## 7 Punktladung vor geerdeten Metallplatten

Das Volumen:

$$V = \{\vec{r} : 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty, -\infty \leq z \leq \infty\} \quad (37)$$

ist bei  $x = 0$  und  $y = 0$  durch geerdete Metallplatten begrenzt. Innerhalb von  $V$  befindet sich eine Punktladung  $q$ .

Bestimmen Sie das Potential  $\Phi(\vec{r})$  in  $V$  (mit Hilfe von Bildladungen). Berechnen Sie die Flächenladungsdichte und die Gesamtladung auf den Platten. Welche Kraft wirkt auf die Punktladung?

Lösung:

Es handelt sich um ein zweidimensionales Problem,  $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y)$ . Die Punktladung  $q_0 = q$  kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit an die Position  $\vec{r}_0 = (a, b, 0)$  gesetzt werden. Mit einer ersten Bildladung  $q_1 = -q$  bei  $(-a, b, 0)$  könnte man die Bedingung  $\Phi(0, y) = 0$  erfüllen, mit einer zweiten Bildladung  $q_2 = -q$  bei  $(a, -b, 0)$  die Bedingung  $\Phi(x, 0) = 0$ . Diese Bildladungen verletzen jedoch die jeweils andere Randbedingung. Dies kann durch eine dritte Bildladung  $q_3$  ersetzt werden.

Zu der gegebenen Punktladung wählen wir drei Bildladungen:

$$q_0 = q \quad , \quad \vec{r}_0 = (a, b, 0) \quad (38)$$

$$q_1 = -q \quad , \quad \vec{r}_1 = (-a, b, 0) \quad (39)$$

$$q_2 = -q \quad , \quad \vec{r}_2 = (a, -b, 0) \quad (40)$$

$$q_3 = q \quad , \quad \vec{r}_3 = (-a, -b, 0) \quad (41)$$

Die vier Punktladungen ergeben das Potential null auf den Ebenen  $x = 0$  und  $y = 0$ . Das Potential aller Ladungen ist:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^3 \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (42)$$

Dieses Potential löst das Randwertproblem:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \text{ in } V \quad , \quad \Phi(\vec{r})|_R = 0 \quad (43)$$

Die Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf den Platten berechnet sich aus der Normalkomponente des elektrischen Feldes:

$$4\pi\sigma(\vec{r})|_R = \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r})|_R \quad , \quad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 q_k \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (44)$$

Für die Flächenladungsdichten  $\sigma_y(x, z) = E_y(x, 0, z)$  und  $\sigma_x(y, z) = E_x(0, y, z)$  erhalten wir:

Für  $x > 0$ :

$$\sigma_y(x, z) = -\frac{qb}{2\pi} \left[ \frac{1}{((x-a)^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+a)^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (45)$$

Für  $y > 0$ :

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{qb}{2\pi} \left[ \frac{1}{(a^2 + (y-b)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (y+b)^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (46)$$



Die Ladungsdichten gelten auf den Metallplatten, also in der  $x-z$ -Ebene für  $x > 0$ , und in der  $y-z$ -Ebene für  $y > 0$ . Wir berechnen die Influenzladung auf der Platte in der  $x-z$ -Ebene:

$$\begin{aligned} q_{y=0}^{infl} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \sigma_y(x, z) = -\frac{qb}{\pi} \int_0^\infty dx \left[ \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} - \frac{1}{(x+a)^2 + b^2} \right] = \\ &= -\frac{qb}{\pi} \int_{-a}^a dx \frac{1}{x^2 + b^2} = -\frac{2q}{\pi} \arctan \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (47)$$

Mit dem entsprechenden Resultat für die  $y-z$ -Ebene erhalten wir für die Gesamtladung auf beiden Metallplatten:

$$q_{infl} = q_{y=0}^{infl} + q_{x=0}^{infl} = -\frac{2q}{\pi} \left[ \arctan \frac{a}{b} + \arctan \frac{b}{a} \right] = -q \quad (48)$$

Die Kraft auf die Punktladung  $q$  bei  $\vec{r}_0$  ist durch das elektrische Feld gegeben, das nicht von dieser Ladung selbst stammt, also durch das Feld der drei Bildladungen:

$$\vec{F} = \sum_{K=1}^3 q_k \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_k}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|^3} = -\frac{q^2}{4} \left[ \left( \frac{1}{a^2} - \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_c + \left( \frac{1}{b^2} - \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_y \right] \quad (49)$$

## 8 Punktladung vor Metallkugel

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Hohlkugel (Radius  $R$ , Zentrum  $\vec{r} = 0$ ) befindet sich eine Punktladung  $q_1$  bei  $\vec{r}_1$ . Berechnen Sie das Potential im Innen- und Außenraum der Kugel. Verwenden Sie hierzu eine geeignete Bildladung  $q_2$  bei  $\vec{r}_2$ . Berechnen Sie die Ladungsdichte und die Gesamtladung auf der Kugeloberfläche. Welche Kraft wirkt zwischen Punktladung und Kugel? Was ändert sich, wenn die Ladung innerhalb der Kugel ist?

Welche Lösung ergibt sich, wenn das Potential auf der Kugeloberfläche einen endlichen Wert  $\Phi_0 = \Phi(R) - \Phi(\infty) \neq 0$  hat?

Lösung:

Das Randwertproblem lautet:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi q_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad \text{für } |\vec{r}| > R, \quad \text{und } \Phi(R) = 0 \quad (50)$$

Wir setzen eine Bildladung  $q_2$  bei  $\vec{r}_2$  (mit  $r_2 < R$ ) an:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \quad (51)$$

Die Bildladung ist so zu wählen, dass die Randbedingung:

$$\Phi(R) = \frac{q_1}{|R\vec{e}_r - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|R\vec{e}_r - \vec{r}_2|} = 0 \quad (52)$$

erfüllt ist, dabei ist  $\vec{R} = R\vec{e}_r$  eine Vektor zu einem Punkt der Kugeloberfläche. Hieraus folgt:

$$(q_1^2 - q_2^2)R^2 - 2R(q_1^2\vec{r}_2 - q_2^2\vec{r}_1) \cdot \vec{e}_r = q_2^2r_1^2 - q_1^2r_2^2 \quad (53)$$

Da dies für alle Richtungen  $\vec{e}_r$  gilt, muss der Koeffizient von  $\vec{e}_r$  verschwinden, also:

$$q_1^2\vec{r}_2 = q_2^2\vec{r}_1 \quad \text{und} \quad (q_1^2 - q_2^2)R^2 = q_2^2r_1^2 - q_1^2r_2^2 \quad (54)$$

Damit ist die Bildladung wie folgt zu wählen:

$$q_2 = -\frac{R}{r_1}q_1 \quad \text{bei} \quad \vec{r}_2 = \frac{R^2}{r_1^2}\vec{r}_1 \quad (55)$$

Das Vorzeichen von  $q_2$  folgt aus der Randbedingung. Wie vorausgesetzt, gilt  $r_2 < R$ . Damit wird das Potential für  $r > R$  zu:

$$\Phi(\vec{r}) = q_1 \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{R}{r_1} \frac{1}{|\vec{r} - (R^2/r_1^2)\vec{r}_1|} \right] \quad (56)$$

Gelegentlich formuliert man zunächst das Randwertproblem für eine Green'sche Funktion  $g(\vec{r}, \vec{r}')$ . Die Bedingungen für die Greensche Funktion sind:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad G\vec{r}, \vec{r}'|_{\vec{r} \in R} = 0 \quad (57)$$

Die Greensche Funktion ist also das Potential an der Stelle  $\vec{r}'$ , das sich für eine Punktladung der Stärke 1 bei  $\vec{r}''$  ergibt. Im vorliegenden Problem ist  $G(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{\Phi(\vec{r})}{q_1}$ . Die Greensche Funktion ist symmetrisch,  $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$ . Aus obigem Potential folgt diese Symmetrie, wenn man  $|\vec{r} - (R^2/r_1^2)\vec{r}_1| = (R/r_1)(R^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_1 + r^2r_1^2/R^2)^{1/2}$  berücksichtigt.

An der Kugeloberfläche bei  $\vec{R} = R\vec{e}_r$  ist das elektrische Feld:

$$\vec{E}(\vec{R}) = -q_1 \frac{\vec{R} - \vec{r}_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|^3} + q_1 \frac{R}{r_1} \frac{\vec{R} - (R^2/r_1^2)\vec{r}_1}{|\vec{R} - (R^2/r_1^2)\vec{r}_1|^3} = \frac{q_1}{R} \frac{r_1^2 - R^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}|^3} \vec{e}_r \quad (58)$$

Dabei wurde  $|\vec{R} - (R^2/r_1^2)\vec{r}_1| = (R/r_1)|\vec{R} - \vec{r}_1|$  verwendet. Die Normalkomponente des Felds bestimmt die induzierte Oberflächenladung:

$$\sigma(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \vec{e}_r \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{q_1}{4\pi R} \frac{r_1^2 - R^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}|^3} \quad (59)$$

Die gesamte Influenzladung auf der Kugeloberfläche ist gleich der negativen Bildladung:

$$\begin{aligned} q_{infl} &= R^2 \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sigma(\vec{R}) = \frac{q_1 R}{2} \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \frac{r_1^2 - R^2}{(r_1^2 + R^2 - 2r_1 R \cos\vartheta)^{3/2}} = \\ &= \frac{q_1(r_1^2 - R^2)}{2r_1} \left[ \frac{1}{|r_1 - R|} - \frac{1}{|r_1 + R|} \right] = \frac{R}{r_1} q_1 = -q_2 \end{aligned} \quad (60)$$

Die Kraft auf die Punktladung  $q_1$  ist durch das elektrische Feld gegeben, das nicht von dieser Ladung selbst stammt, also durch das Feld der Bildladung:

$$\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -q_1^2 \frac{R}{r_1} \frac{1}{(1 - R^2/r_1^2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = \frac{q_1^2 R}{(R^2 - r_1^2)^2} \vec{r}_1 \quad (61)$$

Es wurde  $q_2 = -(R/r_1)q_1$  und  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (1 - R^2/r_1^2)\vec{r}_1$  eingesetzt. Die Kraft zwischen Punktladung und Metallkugel ist attraktiv.

Das zuvor errechnete Potential errechnet auch das andere Randwertproblem:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi q_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad \text{für } |\vec{r}| < R \quad , \quad \text{und} \quad \Phi(R) = 0 \quad (62)$$

In diesem Fall ist eine Ladung  $q_2$  innerhalb der Kugel gegeben, und gesucht ist das Feld innerhalb der Kugel, die Lösung des Problems erfolgt durch eine Bildladung  $q_1$  bei  $\vec{r}_2$  (mit  $r_1 > R$ ). Die Oberflächenladung  $\sigma = \vec{n} \cdot \vec{E}|_R / 4\pi$  ändert das Vorzeichen, weil der Normalenvektor  $\vec{n} = -\vec{e}_r$  jetzt nach innen zeigt.

Um einen endlichen Potentialwert  $\Phi_0 = \Phi(R) - \Phi(\infty)$  auf der Kugel zu erreichen, wird zusätzlich die Punktladung  $q_3$  bei  $\vec{r}_3 = 0$  eingeführt. Diese erzeugt das Potential  $q_3/R = \Phi_0$  auf der Kugel, es muss also  $q_3 = R\Phi_0$  gewählt werden.

## 9 Green'sche Funktion

3. Eine Punktladung  $q$  befindet sich im Punkt  $(0, 0, a)$  über einer im Ursprung zentrierten, geerdeten Metallkugel von Radius  $R$ , wobei  $R < a$  ist. Bestimmen Sie mittels der Green'schen Funktion

$$4\pi\epsilon_0 G_D(\vec{r}, \vec{r}') = |\vec{r}' - \vec{r}|^{-1} - \left| \frac{r}{R} \vec{r}' - \frac{R}{r} \vec{r} \right|^{-1}, \quad (2)$$

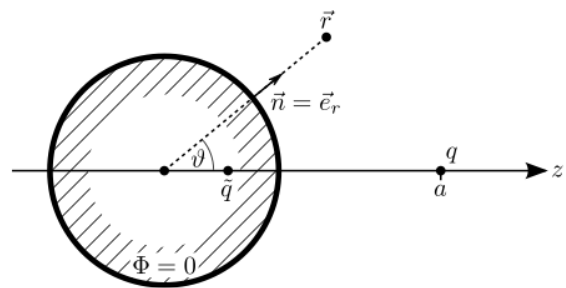
das Potential  $\Phi(\vec{r})$  zur Randbedingung, dass das Potential auf der Kugeloberfläche verschwindet. Berechnen Sie die auf der Kugeloberfläche influenzierte Flächenladungsdichte  $\sigma(\vartheta)$  sowie die gesamte influenzierte Flächenladung  $\tilde{q}$ . Mit welcher Kraft  $\vec{F}$  wird die Punktladung  $q$  von der Metallkugel angezogen?

Lösung

Eine Punktladung  $q$  befinde sich am Ort  $(0, 0, a)$  vor einer geerdeten Metallkugel vom Radius  $R$  (Dirichlet'sches Randwertproblem)

In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V dV' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \epsilon_0 \oint_{\partial V} dF' \Phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} G_D(\vec{r}, \vec{r}')$$



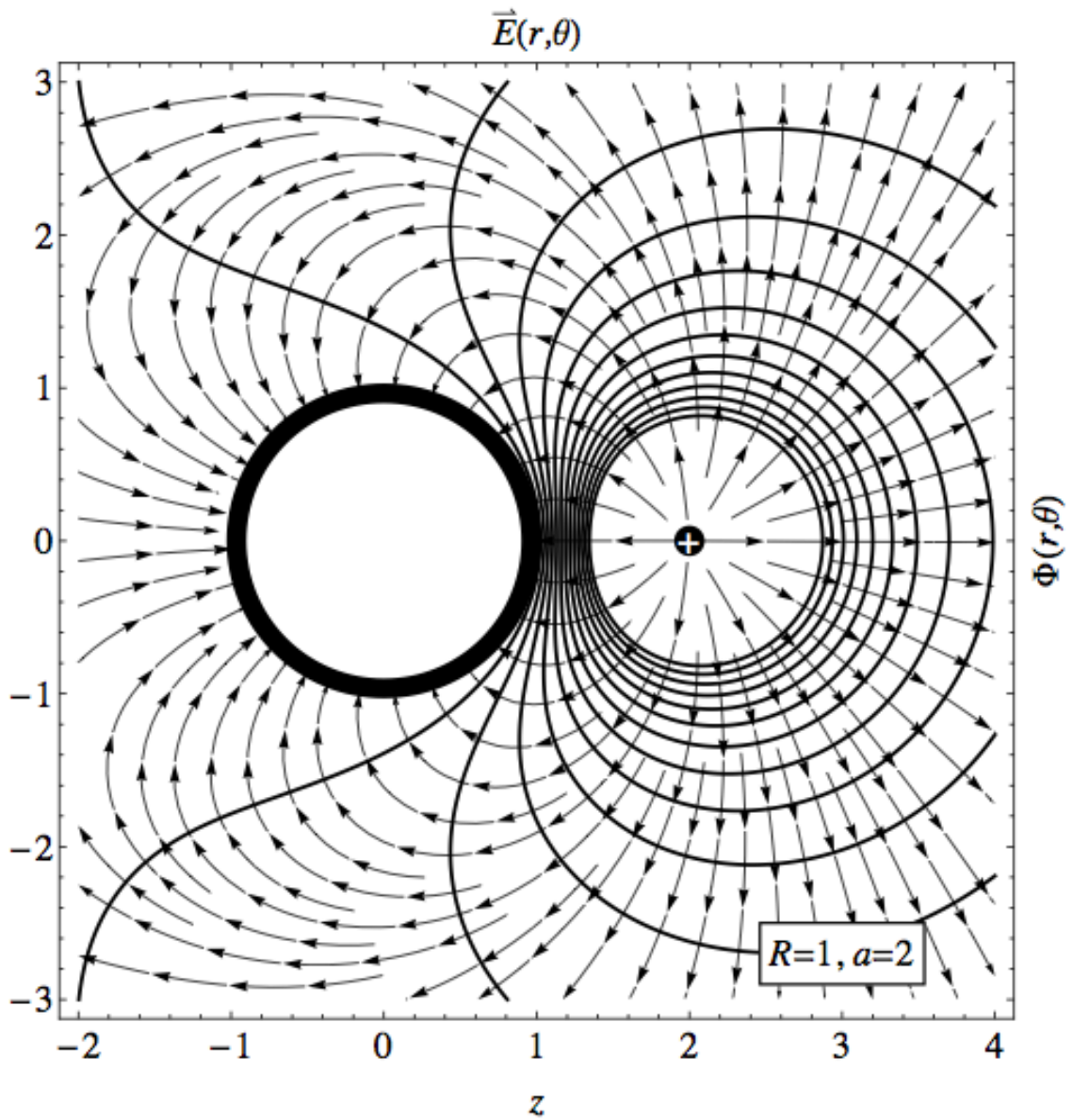
mit der Dirichlet'schen Green'schen ( $G_D(\vec{r}, \vec{r}')|_{\partial V} = 0$ ) Funktion für die Kugel

$$4\pi\epsilon_0 G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\frac{R}{r'}}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2} \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\frac{r'}{R} \vec{r} - \frac{R}{r'} \vec{r}'|}$$

Anmerkung: Wer etwas mehr über Green'sche Funktionen erfahren will, der sollte u.A. einen Blick in diese kurze Zusammenfassung werfen: <http://bit.ly/Tc1wvX>

Da die Kugel geerdet ist, ist auch auf der Kugeloberfläche  $\Phi(\vec{r}')|_{\partial V} = 0$  und es folgt für das Potential mit  $\rho(\vec{r}') = q\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a})$

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{|\vec{r}'| > R} d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') q\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{\frac{R}{a}}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a^2} \vec{a}|} \right)$$



Dies entspricht der Punktladung  $q$  bei  $\vec{a}$  und einer Spiegelladung  $-q\frac{R}{a}$  bei  $\frac{R^2}{a^2}\vec{a}$  außerhalb von  $V$ . In Kugelkoordinaten folgt für das Potential (mit  $\vec{r} \cdot \vec{a} = \vec{r} \cdot a\vec{e}_z = ar \cos \vartheta$ )

$$\begin{aligned}\Phi(r, \vartheta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta}} - \frac{\frac{R}{a}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{a^2}a\right)^2 - 2\frac{R^2}{a^2}ar \cos \vartheta}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{R^2}r^2 + R^2 - 2ar \cos \vartheta}} \right)\end{aligned}$$

Mit dem Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

erhält man für die influenzierte Flächenladungsdichte

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= \epsilon_0 \vec{e}_r \cdot \vec{E}|_{r=R} = -\epsilon_0 \vec{e}_r \cdot \text{grad } \Phi(r, \vartheta)|_{r=R} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi(r, \vartheta)}{\partial r} \right|_{r=R} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left[ \frac{-(2r - 2a \cos \vartheta)}{2(r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta)^{3/2}} - \frac{-\left(2\frac{a^2}{R^2}r - 2a \cos \vartheta\right)}{2\left(R^2 + \frac{a^2}{R^2}r^2 - 2ar \cos \vartheta\right)^{3/2}} \right] \Bigg|_{r=R} \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{2R - 2a \cos \vartheta - 2\frac{a^2}{R} + 2a \cos \vartheta}{2\left(R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta\right)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi} \frac{R^2 - a^2}{R\left(R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

Für die gesamte influenzierte Flächenladung erhält man

$$\begin{aligned}
 \tilde{q} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta R^2 \sin \vartheta \sigma(\vartheta) \\
 &= 2\pi \frac{q}{4\pi} R(R^2 - a^2) \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin \vartheta}{\underbrace{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta)^{3/2}}_{= -\frac{1}{aR} \frac{d}{d\vartheta} (R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta)^{-1/2}}} \\
 &= \frac{q}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} \int_0^\pi d\vartheta \frac{d}{d\vartheta} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta}} \\
 &= \frac{q}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} \left. \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \vartheta}} \right|_0^\pi \\
 &= \frac{q}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} \left[ \frac{1}{\sqrt{(R+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(R-a)^2}} \right] \\
 &= \frac{q}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} \left( \frac{1}{|R+a|} - \frac{1}{|R-a|} \right) \\
 &= \frac{q}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} \left( \frac{1}{a+R} - \frac{1}{a-R} \right) \\
 &= \frac{q}{2} \frac{a^2 - R^2}{a} \frac{(a-R) - (a+R)}{a^2 - R^2} \\
 &= -q \frac{R}{a}
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet dass  $\sqrt{x^2} = |x|$  und  $a > R$  gilt. Das Ergebnis entspricht nun gerade der fiktiven Bildladung am Punkt  $\frac{R^2}{a^2}\vec{a}$ .

Allgemein gilt nun für die Kraft  $\vec{F}_{12}$  von einer Ladung  $q_1$  auf eine Ladung  $q_2$

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Um die Kraft auf die Punktladung zu bestimmen haben wir nun zwei Möglichkeiten:

- Kraft mit der  $q$  von der Metallkugel angezogen wird entspricht dem Negativen der Kraft mit der  $q$  die influenzierte Flächenladungsdichte anzieht:

Zwischen der Ladung  $q$  im Punkt  $\vec{a} = a\vec{e}_z$  und einem Punkt auf der Kugeloberfläche am Ort  $\vec{r} = R\vec{e}_r$ , welcher die infinitesimale Ladung  $d\tilde{q}$  trägt, wirkt die infinitesimale Kraft

$$d\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\tilde{q} \frac{R\vec{e}_r - a\vec{e}_z}{|R\vec{e}_r - a\vec{e}_z|^3}$$

Mit  $d\tilde{q} = \sigma(\vartheta) dS = \sigma(\vartheta) R^2 d\Omega$  ergibt sich für die gesamte Kraft



$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S^2} R^2 d\Omega \sigma(\vartheta) \frac{R\vec{e}_r - a\vec{e}_z}{|R\vec{e}_r - a\vec{e}_z|^3} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4\pi R} (R^2 - a^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta R^2 \sin\vartheta \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos\vartheta)^3} \underbrace{\begin{pmatrix} R \sin\vartheta \cos\varphi \\ R \sin\vartheta \sin\varphi \\ R \cos\vartheta - a \end{pmatrix}}_{\substack{\text{die ersten beiden} \\ \text{Komponenten} \\ \text{verschwinden bei} \\ \varphi\text{-Integration}}} \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} R(R^2 - a^2) \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \frac{R \cos\vartheta - a}{\underbrace{(R^2 + a^2 - 2aR \cos\vartheta)^3}_{=:u \Rightarrow du = -2aR d\cos\vartheta}} \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} R(R^2 - a^2) \int_{(R+a)^2}^{(R-a)^2} u^{-3} \left[ \frac{1}{2a}(R^2 + a^2 - u) - a \right] \left( -\frac{1}{2aR} \right) du \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} u^{-3} (R^2 - a^2 - u) du \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \left[ (R^2 - a^2) \int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} u^{-3} du - \int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} u^{-2} du \right] \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \left[ (R^2 - a^2) \left( -\frac{1}{2} \right) u^{-2} \Big|_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} - (-1) u^{-1} \Big|_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} \right] \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \left[ \left( \frac{1}{(R+a)^2} - \frac{1}{(R-a)^2} \right) - \frac{1}{2} (R^2 - a^2) \left( \frac{1}{(R+a)^4} - \frac{1}{(R-a)^4} \right) \right] \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \left[ \frac{(R-a)^2 - (R+a)^2}{(R+a)^2(R-a)^2} - \frac{1}{2} (R^2 - a^2) \left( \frac{(R-a)^4 - (R+a)^4}{(R+a)^4(R-a)^4} \right) \right] \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \left( \frac{-4aR}{(R^2 - a^2)^2} - \frac{1}{2} (R^2 - a^2) \frac{-8aR(R^2 + a^2)}{(R^2 - a^2)^4} \right) \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - a^2}{4a^2} \frac{-4aR(R^2 - a^2) + 4aR(R^2 + a^2)}{(R^2 - a^2)^3} \\
&= -\vec{e}_z \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R}{a} \frac{2a^2}{(R^2 - a^2)^2} = -\vec{e}_z \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{aR}{(R^2 - a^2)^2}
\end{aligned}$$

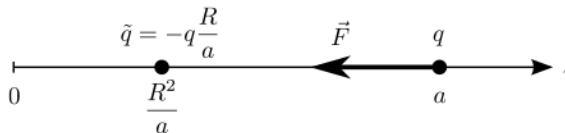
Dabei haben wir folgende Binome verwendet (lassen sich leicht mit dem Pascal'schen Dreieck berechnen):

$$\begin{aligned}(R \pm a)^2 &= R^2 \pm 2aR + a^2 \\ (R \pm a)^4 &= R^4 \pm 4R^3a + 6R^2a^2 \pm 4Ra^3 + a^4\end{aligned}$$

Woraus folgt:

$$\begin{aligned}(R - a)^2 - (R + a)^2 &= -4aR \\ (R - a)^4 - (R + a)^4 &= -8aR(R^2 + a^2)\end{aligned}$$

- Die Kraft mit der  $q$  von der Metallkugel angezogen wird entspricht der Kraft mit der  $q$  von der Bildladung  $\tilde{q}$  am Ort  $\frac{R^2}{a^2}\vec{a}$  angezogen wird:



$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{q\tilde{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a} - \frac{R^2}{a^2}\vec{a}}{|\vec{a} - \frac{R^2}{a^2}\vec{a}|^3} = \frac{q\tilde{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) a\vec{e}_z}{\left[\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) a\right]^3 |\vec{e}_z|^3} \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{a}}{\left(a - \frac{R^2}{a}\right)^2} \vec{e}_z = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{aR}{(R^2 - a^2)^2} \vec{e}_z\end{aligned}$$