Ferienkurs

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Übungsblatt 1

1 Verifikation des Stokesschen Satzes

Verifizieren Sie den Stokeschen Satz für das Vektorfeld:

$$\vec{V} = (4x/3 - 2y)\vec{e}_x + (3y - x)\vec{e}_y \tag{1}$$

und die Fläche:

$$A = \{\vec{r} : (x/3)^2 + (y/2)^2 \leq 1, z = 0\} \tag{2}$$

2 Verifikation des Gaußschen Satzes

Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld:

$$\vec{V} = ax\vec{e}_x + by\vec{e}_y + cz\vec{e}_z \tag{3}$$

und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

3 Rechnen mit Gradient, Divergenz und Rotation

Zeigen Sie $div(\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot rot\vec{V} - \vec{V} \cdot \vec{W}$ durch Auswertung in kartesischen Komponenten. Werten Sie analog dazu die Ausdrücke $rot(\Phi\vec{V}), rot(\vec{V} \times \vec{W})$ und $grad(\vec{V} \cdot \vec{W})$ aus,

4 Ladungsdichte für Kugelschale und Kreisscheibe

Eine Kugelschale und eine Kreisscheibe (beide infinitesimal dünn, und mit dem Radius R) sind homogen geladen (Gesamtladung q). Geben Sie für beide Fälle die Ladungsdichte an (mit Hilfe von δ - und Θ - Funktionen).

5 Homogen geladene Kugel

Bestimmen Sie das elektrostatische Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{4}$$

für eine homogen geladene Kugel (Ladung q, Radius R). Legen Sie dazu $\vec{r}$ in z Richtung und führen Sie die Integration in Kugelkoordinaten aus. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

6 Homogen geladener Kreiszylinder

Bestimmen Sie das elektrische Feld eines homogen geladenen unendlich langen Kreiszylinders (Radius R, Länge L, Ladung/Länge = q/L, $L \to \infty$). Lösen sie das Problem:

1. mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes.
2. über die Poisson-Gleichun.

Beachten Sie, dass das Potential im Unendlichen nicht verschwindet.

7 Punktladung vor geerdeten Metallplatten

Das Volumen:

$$V = \{\vec{r} : 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty, -\infty \leq z \leq \infty\} \tag{5}$$

ist bei $x = 0$ und $y = 0$ durch geerdete Metallplatten begrenzt. Innerhalb von V befindet sich eine Punktladung q.
Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ in V (mit Hilfe von Bildladungen). Berechnen Sie die Flächenladungsdichte und die Gesamtladung auf den Platten. Welche Kraft wirkt auf die Punktladung?

8 Punktladung vor Metallkugel

Außerhalb einer geerdeten, leitenden Hohlkugel (Radius R, Zentrum $\vec{r} = 0$) befindet sich eine Punktladung q_1 bei $\vec{r}_1$. Berechnen Sie das Potential im Innen- und Außenraum der Kugel. Verwenden Sie hierzu eine geeignete Bildladung q_2 bei $\vec{r}_2$. Berechnen Sie die Ladungsdichte und die Gesamtladung auf der Kugeloberfläche. Welche Kraft wirkt zwischen Punktladung und Kugel? Was ändert sich, wenn die Ladung innerhalb der Kugel ist?
Welche Lösung ergibt sich, wenn das Potential auf der Kugeloberfläche einen endlichen Wert $\Phi_0 = \Phi(R) - \Phi(\infty) \neq 0$ hat?

9 Green'sche Funktion

3. Eine Punktladung q befindet sich im Punkt $(0, 0, a)$ über einer im Ursprung zentrierten, geerdeten Metallkugel von Radius R, wobei $R < a$ ist. Bestimmen Sie mittels der Green'schen Funktion

$$4\pi\epsilon_0 \, G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = |\vec{r}\,' - \vec{r}|^{-1} - \left| \frac{r}{R}\vec{r}\,' - \frac{R}{r}\vec{r} \right|^{-1}, \tag{2}$$

das Potential $\Phi(\vec{r})$ zur Randbedingung, dass das Potential auf der Kugeloberfläche verschwindet. Berechnen Sie die auf der Kugeloberfläche influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(\vartheta)$ sowie die gesamte influenzierte Flächenladung $\tilde{q}$. Mit welcher Kraft $\vec{F}$ wird die Punktladung q von der Metallkugel angezogen?