Ferienkurs Experimentalphysik 3

Wintersemester 2014/2015

Thomas Maier, Alexander Wolf

Lösung 3

Beugung und Interferenz

Aufgabe 1: Seifenblasen

a) Erklären Sie, warum Seifenblasen in bunten Farben schillern.

b) Eine Seifenblase, die von Luft umgeben ist, hat einen Brechungsindex von $n = 1,34$. Ein Bereich erscheint im senkrecht reflektierten Licht rot ($\lambda_0 = 734$nm). Geben Sie zwei mögliche Schichtdicken der Seifenhaut an.

c) Welche Wellenlängen aus dem sichtbaren Spektralbereich werden bei der Reflexion an einer 500nm dicken Seifenschicht mit dem Brechungsindex $n = 1,34$ bei senkrechtem Lichteinfall

(i) verstärkt bzw.

(ii) ausgelöscht?

Das für das menschliche Auge wahrnehmbare Lichtspektrum liegt bei Wellenlängen zwischen 380nm und 780nm.

Lösung 1:

a) Die Farben der Seifenblase werden durch Interferenz an dünnen Schichten erzeugt. Für eine gegebene Schichtdicke erfüllen nur bestimmte Wellenlängen die Bedingung für konstruktive oder destruktive Interferenz. Nur diese Frequenzen werden jeweils verstärkt oder ausgelöscht, was eine bestimmte Farbe zur Folge hat. Verschiedene Dicken der Seifenblasenhaut an unterschiedlichen Stellen führen zu verschiedenen Farben. Durch Gravitation und Bewegung der gesamten Blase fließt die Seifenlauge in der Haut. Dadurch entstehen Dickefluktuationen und die Blase beginnt zu schillern.

b) Durch Reflexion am optisch dichteren Medium entsteht ein Phasensprung von π. Für konstruktive Interferenz gilt:

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} 2nd = m \cdot 2\pi - \pi \tag{1}$$
$$\rightarrow d_m = \frac{\lambda_0}{4n}(2m-1) \tag{2}$$
$$= 136{,}9\text{nm} \cdot (2m-1) \tag{3}$$

Für $m = 1$ und $m = 2$: $d_1 = 137$nm bzw. $d_2 = 411$nm,
für $m = 3$ und $m = 4$: $d_3 = 685$nm bzw. $d_4 = 959$nm.

c) Für Verstärkung gilt wieder:

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2nd = \pi(2m-1) \tag{4}$$
$$\lambda_m = \frac{2680\text{nm}}{2m-1} \tag{5}$$
$$\rightarrow \lambda_3 = 536\text{nm}, \ \lambda_4 = 383\text{nm} \tag{6}$$

Für Auslöschung gilt:

$$2nd = m\lambda \tag{7}$$
$$\lambda_m = \frac{1340\text{nm}}{m} \tag{8}$$
$$\rightarrow \lambda_2 = 670\text{nm}, \ \lambda_3 = 447\text{nm} \tag{9}$$

Aufgabe 2: Vergütung

Eine Kameralinse aus Glas mit dem Brechungsindex $n_G = 1{,}6$ sei zur Erhöhung der Lichtdurchlässigkeit mit einer Beschichtung mit Brechungsindex $n_B = 1{,}38$ vergütet und habe überall die gleiche Dicke. Betrachten Sie die Linsenoberfläche als eine ebene Platte.

a) Welche Dicke d muss die Beschichtung aufweisen, damit in 1. Ordnung das Licht der Wellenlänge $\lambda_0 = 540$nm nicht reflektiert wird?

b) Gibt es destruktive Interferenzen für andere sichtbare Wellenlängen?

c) Um welchen Faktor wird der Reflexionsgrad von Licht der Wellenlängen $\lambda_1 = 400$nm und $\lambda_2 = 700$nm durch diese Beschichtung verringert? Vernachlässigen Sie die Differenzen der Amplituden des an beiden Oberflächen reflektierten Lichtes.

Lösung 2:

a) Destruktive Interferenz für reflektierte Wellen bei:

$$2n_B d = \lambda_0 \left(m + \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

In 1. Ordnung ist $m = 0$, somit folgt:

$$d = \frac{\lambda_0}{4n_B} = 97,8\text{nm} \tag{11}$$

b) Destruktive Interferenz nächsthöherer Ordnung bei $m = 1$:

$$\lambda = \frac{2n_B d}{3/2} = 180\text{nm} \tag{12}$$

Diese Wellenlänge liegt bereits im UV-Bereich, es gibt also keine weiteren sichtbaren Frequenzen, für die destruktive Interferenz auftritt.

c) Für andere Wellenlängen als λ_0 tritt teilweise destruktive Interferenz auf. Um diese zu berechnen, betrachten wir zunächst die Intensität der einfallenden Welle:

$$I_0 = \Psi\Psi^* = A^2 e^{i\omega t} e^{-i\omega t} = a^2 \tag{13}$$

Für die teilweise destruktive Interferenz der reflektierten Wellen betrachten wir den Phasenunterschied $\delta = 2\pi\left(2n_B d/\lambda\right)$. Für das Verhältnis der Intensität der interferierenden reflektierten Wellen I und der einfallenden Welle I_0 erhält man dann:

$$\frac{I}{I_0} = \left(e^{i\omega t} + e^{i\omega t + i\delta}\right)\left(e^{-i\omega t} + e^{-i\omega t - i\delta}\right) = 2 + 2cos\delta = 4cos^2\left(\delta/2\right) \tag{14}$$

Für die gegebenen Wellenlängen folgt:

$$\lambda_1 = 400\text{nm} : \frac{\delta}{2\pi} = \frac{270}{400} = 0,675; \frac{I}{I_0} = 1,092 \tag{15}$$

$$\lambda_2 = 700\text{nm} : \frac{\delta}{2\pi} = \frac{270}{700} = 0,386; \frac{I}{I_0} = 0,492 \tag{16}$$

Aufgabe 3: Michelson-Interferometer

Welche optischen Weglängendifferenzen in den beiden Armen eines Michelson-Interferometers sind höchstens zulässig, damit gerade noch Interferenzstreifen beobachtet werden können unter Verwendung von:

a) Laserlicht ($\Delta\nu/\nu \approx 10^{-13}, \lambda \approx 550$nm; $\Delta\nu$ ist die spektrale Halbwertsbreite)

b) Licht aus einem angeregten Atomstrahl ($\Delta\nu/\nu \approx 10^{-7}, \lambda \approx 550$nm)

c) weißem Licht (Näherung)

Lösung 3:

a) Die Kohärenzlänge berechnet sich aus der Lichtgeschwindigkeit c und der Kohärenzzeit τ:

$$\Delta s = c \cdot \tau = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda}{\frac{\Delta\nu}{\nu}} \tag{17}$$

$$\Delta s_{Laser} = 5500\text{km} \tag{18}$$

b)

$$\Delta s_{Atomstrahl} = 5,5\text{m} \tag{19}$$

c) Bei weißem Licht besteht eine feste Phasenbeziehung nur innerhalb eines einzelnen Wellenzuges. Für eine grobe Näherung betrachten wir Wellenlängen zwischen 400nm und 800nm. Es gilt also $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx (800\text{nm} - 400\text{nm})/600\text{nm} = 2/3$. Dies muss noch durch $\Delta\nu/\nu$ ausgedrückt werden. Hierfür benutzen wir:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad \rightarrow \frac{\delta\nu}{\delta\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} = -\frac{\nu}{\lambda} \tag{20}$$

$$\rightarrow \frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \tag{21}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \tag{22}$$

Hierbei wurde der Übergang von infinitesimalen zu makroskopischen Verschiebungen in ν und λ durchgeführt, was eine Näherung darstellt. Somit kann man benutzen, dass $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2/3$. Damit erhalten wir

$$\Delta s_{Licht} = 900\text{nm}, \tag{23}$$

was also mit einer Wellenlänge vergleichbar ist.

Aufgabe 4: Röntgen- und Neutronendiffraktometrie

a) In kristallinem Natrium sitzen die Atome auf den Eck- und Mittelpunkten eines Gitters (flächenzentriert kubisches Gitter), das aus würfelförmigen Einheitszellen der Kantenlänge $a = 4,29$Å aufgebaut ist. Sie reflektieren monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 1,54$Å an den zu den Würfelseiten parallelen Netzebenen. Bei welchen Winkeln tritt Bragg-Reflexion auf?

b) Ein Neutronenstrahl fällt auf polykristallines Wismut (Gitterebenenabstand $d = 4$Å). Ab welcher Neutronenenergie ist keine Streuung mehr möglich? Für die Energie gilt $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, mit dem Wellenvektor k des Neutrons. Die Neutronenmasse beträgt $m = 1,674 \cdot 10^{-27}$kg, das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum beträgt $\hbar = \frac{1}{2\pi} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} Js$.

Lösung 4:

a) Es ist im Wesentlichen nach der Bragg-Beziehung gefragt. Trifft Röntgenlicht auf das dreidimensionale Gitter, so interferieren die an verschiedenen Netzebenen gestreuten Strahlen konstruktiv, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches n der Wellenlänge λ beträgt. Dies führt zur Bragg-Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin\Theta \tag{24}$$

Der Netzebenenabstand parallel zu den Würfelseitenflächen beträgt $d = \frac{a}{2} = 2,145$Å, da man ja die Mittelatome mitzählen muss. Daraus folgt, dass

$$\sin\Theta_n = 0,559n \tag{25}$$

Also

$$\Theta_n = \arcsin(0,359n) \tag{26}$$

mit $n = 1, 2, ...$ Lösungen sind

$$\Theta_1 \approx 21,0°, \Theta_2 \approx 45,9° \tag{27}$$

Für größere n gibt es keine Lösung.

b) Es gilt natürlich wieder die Bragg-Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin\Theta \tag{28}$$

Sie kann nicht mehr erfüllt werden, wenn $\lambda > 2d_{max}$ ist, also wenn $\lambda > 0,8$nm. Oberhalb dieser Grenzwellenlänge gibt es keine kohärente Streuung mehr. Es ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, und mit $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ erhält man den gesuchten Energiebereich als:

$$0 \le E \le \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2d_{max}}\right)^2 = 1,3 \cdot 10^{-3}\text{eV} \tag{29}$$

Aufgabe 5: Doppelspalt

Ein Doppelspalt-Experiment wird mit einen Helium-Neon-Laser der Wellenlänge $\lambda = 633$nm durchgeführt. Stellt man einen transparenten Kunststoffstreifen vor einen der Spalte, so beobachtet man eine Verschiebung des Interferenzmusters um 5,5 Streifen. Wird das gleiche Experiment jedoch unter Wasser durchgeführt, dann verschiebt sich das Interferenzmuster lediglich um 3,5 Streifen. Der Brechungsindex von Wasser beträgt $n_w = 1,33$. Berechnen Sie die Dicke und den Brechungsindex des Kunststoffstreifens.

Lösung 5:

Durch das Einschieben eines Kunststoffstreifens mit Dicke d innerhalb eines Mediums mit Brechungsindex n_i verlängert sich der optische Wegunterschied zwischen den beiden Spalten um

$$d \cdot \Delta n = d \cdot (n_k - n_i) = s_i \cdot \lambda \tag{30}$$

Dabei ist s_i die Anzahl an Streifen, um die das Interferenzmuster dabei verschoben wird, und n_k der Brechungsindex des Kunststoffstreifens.

Auflösen obiger Gleichung auf d und Gleichsetzen für die Medien Luft (Index "l") und Wasser (Index "w") ergibt

$$\frac{s_l \cdot \lambda}{n_k - n_l} = \frac{s_w \cdot \lambda}{n_k - n_w} \tag{31}$$

und schließlich:

$$n_k = \frac{n_w s_l - n_l s_w}{s_l - s_w} = 1,908 \tag{32}$$

$$d = \frac{s_l \cdot \lambda}{n_k - n_l} = 3,84\mu\text{m} \tag{33}$$

Aufgabe 6: Beugungsgitter

Ein Gitter mit 1000 Spalten, dessen Spaltabstand $d = 8\ \mu$m und Spaltbreite $b = 3\ \mu$m ist, werde von einer kohärenten Lichtquelle mit einer Wellenlänge von $\lambda = 635$ nm bestrahlt.

a) Bis zu welcher Ordnung kann man die Interferenzmaxima sehen?

b) Gibt es Interferenzmaxima, die man im Interferenzbild nicht als solche erkennt? Wenn ja, warum und treten sie hier auf?

c) Welche Unterschiede im Interferenzbild würden Sie erhalten, wenn Sie statt eines Gitters einen Doppelspalt verwenden?

Lösung 6:

a) Die Bedingung für ein (Haupt-)Interferenzmaximum m-ter Ordnung lautet:

$$d\ \sin\theta = m\ \lambda \tag{34}$$

dabei ist der Sinus stets kleiner als 1. Man erhält

$$1 \geq m\frac{\lambda}{d} \qquad \rightarrow \qquad m \leq \frac{d}{\lambda} = 12,60 \tag{35}$$

Die maximal angezeigte Ordnung ist demnach die 12.

b) Damit ein Interferenzmaximum nicht als solches erkannt werden kann, muss an dessen Stelle ein Beugungsminimum vorliegen. Die Bedingung für ein Beugungsminimum n-ter Ordnung lautet:

$$b\ \sin\theta = n\ \lambda \tag{36}$$

Für ein Zusammenfallen des m-ten Interferenzmaximus mit dem n-ten Beugungsminimums unter dem Winkel θ erhält man demnach:

$$\frac{m}{d} = \frac{n}{b} \qquad \rightarrow \qquad \frac{m}{n} = \frac{d}{b} = \frac{8}{3} \tag{37}$$

Das bedeutet, dass jedes 8. Interferenzmaximum mit einem 3. Beugungsminimum zusammenfällt.

c) Beim Doppelspalt erhält man durch die Interferenz der beiden Spalte eine Verteilung von (Haupt-)maxima. Im Falle eines Gitters treten zusätzlich zu den Hauptmaxima (Interferenz eines Spaltes mit seinem Benachbarten) weitere Nebenmaxima auf, die durch das paarweise interferieren der verschiedenen Spalte untereinander kommen.