

# Ferienkurs Experimentalphysik 3

Wintersemester 2014/2015

Thomas Maier, Alexander Wolf

## Lösung 2

### Optische Abbildungen

#### Aufgabe 1: Vergrößerungslinse

Mit einer (dünnen) Linse soll ein Gegenstand  $G$  so auf einen 3m entfernten Bildschirm abgebildet werden, dass ein 10fach vergrößertes Bild entsteht. Welche Brennweite muss die Linse haben?

#### Lösung 1:

Aus der Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (1)$$

und dem Abbildungsmaßstab

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = 10 \quad (2)$$

sowie dem Abstand zwischen Gegenstand und Bildschirm

$$g + b = 3\text{m} \quad (3)$$

folgt:

$$11g = 3\text{m} \rightarrow g = \frac{3}{11}\text{m} \quad (4)$$

$$b = \left(3 - \frac{3}{11}\right)\text{m} = \frac{30}{11}\text{m} \quad (5)$$

$$f = \frac{g \cdot b}{g + b} = \frac{90}{11 \cdot 11 \cdot 3}\text{m} = 0,25\text{m} \quad (6)$$

## Aufgabe 2: Brille

Die Linse eines gesunden menschlichen Auges kann ein scharfes Bild von Gegenständen auf der Netzhaut erzeugen, die mindestens 25cm entfernt sind. Der Abstand zwischen Netzhaut und Linse beträgt etwa 3cm.

- Welche Brennweite nimmt die Linse an, wenn das Auge auf unendlich fokussiert? Welche wenn es auf einen Gegenstand in 25cm Entfernung fokussiert?
- Durch eine Verformung des Augapfels hat sich der Abstand zwischen Netzhaut und Linse auf 3,5cm vergrößert. Ist das Auge kurz- oder weitsichtig geworden? Welche Brennweite muss eine Brille haben, die sich 2cm vor dem Auge befindet, um diesen Effekt wieder auszugleichen?
- Jetzt hat sich der Augapfel auf 2,5cm verkürzt. Tritt die Fehlsichtigkeit nun im Nah- oder im Fernbereich auf? Welche Brennweite muss die Brille jetzt haben, um in diesem Bereich die alte Sehschärfe wiederherzustellen?

## Lösung 2:

- Fokussiert das Auge auf unendlich, so gilt  $1/g = 0$  und somit  $f = b = 30\text{mm}$ . Wird ein Gegenstand in  $g = 25\text{cm}$  Entfernung fokussiert, erhält man mithilfe der Linsengleichung

$$f = \frac{b \cdot g}{b + g} = 27\text{mm}. \quad (7)$$

- Bei maximaler Entspannung des Auges (also wenn es auf unendlich fokussiert) liegt die Bildebene durch die Verformung des Augapfels nun vor der Netzhaut. Weit entfernte Gegenstände können deshalb nicht mehr scharf abgebildet werden, das Auge ist also kurzsichtig geworden. Die Brennweite der Linse des Auges beträgt hier  $f_1 = 30\text{mm}$  (vgl. Teilaufgabe a) und bildet mit der Linse der Brille mit gesuchter Brennweite  $f_2$  ein Linsensystem, das eine Bildweite von  $b = 35\text{mm}$  haben muss. Für die Brennweite  $f$  eines Linsensystems gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}, \quad (8)$$

wobei  $d = 20\text{mm}$  der Abstand der Linsen ist. Einsetzen in die Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (9)$$

( $1/g = 0$ ) und Auflösen auf  $f_2$  liefert

$$f_2 = \frac{b \cdot (f_1 - d)}{f_1 - b} = -70\text{mm}, \quad (10)$$

also eine (konkave) Streulinse.

- c) Liegt der Fokus des Auges auf einem Gegenstand im Nahbereich ( $g = 25\text{cm}$ ), befindet sich die Bildebene nun hinter der Netzhaut. Das Auge ist nun weit-sichtig. Analog zu Aufgabenteil b) benötigen wir die Gleichung für die Brennweite eines Linsensystems und die Linsengleichung. Dabei beträgt  $b = 25\text{mm}$ ,  $g = 250\text{mm}$  und  $f_1 = 27\text{mm}$  (da Fokus im Nahbereich, vgl. a) ). Mit der Linsengleichung erhalten wir die erforderliche Brennweite des Linsensystems als:

$$f = \frac{b \cdot g}{b + g} = 23\text{mm}. \quad (11)$$

Einsetzen in die Gleichung für die Brennweite eines Linsensystems und Auflösen auf  $f_2$  liefert

$$f_2 = \frac{f \cdot (f_1 - d)}{f_1 - f} = 40\text{mm}, \quad (12)$$

also eine (konvexe) Sammellinse.

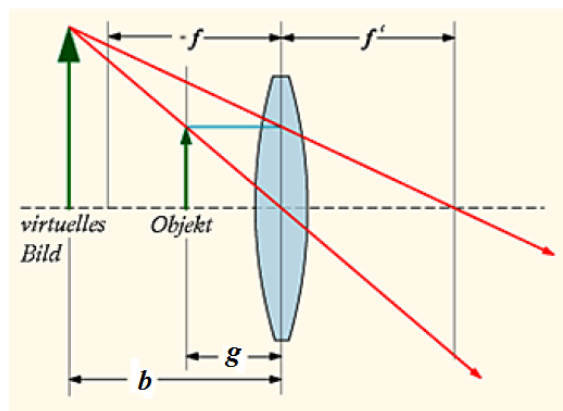
### Aufgabe 3: Lupe

Eine Sammellinse mit Brennweite  $f = 100\text{mm}$  soll als Lupe verwendet werden.

- Skizzieren sie den Strahlengang und wo die Abbildung entsteht.
- Wie weit darf die Lupe maximal vom Papier entfernt sein? Was ist in diesem Fall die Bildweite und die Vergrößerung?

### Lösung 3:

- Eine Lupe erzeugt von einem Gegenstand innerhalb ihrer Brennweite eine virtuelle Abbildung. Da sich die Abbildung auf der gleichen Seite wie der Gegenstand befindet, ist die Bildweite nach der Vorzeichenkonvention negativ.



- Da sich der Gegenstand innerhalb der Brennweite befinden muss, darf der Abstand maximal  $100\text{mm}$  betragen. In diesen Fall gilt für die Bildweite:

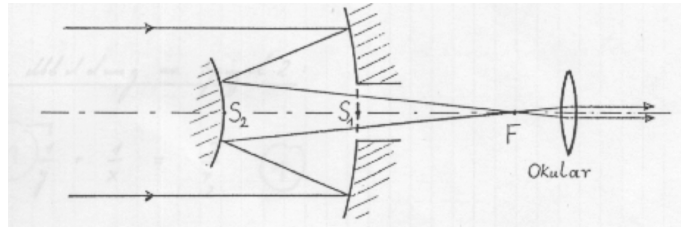
$$b = \frac{fg}{g-f} = \infty \quad (13)$$

Die Abbildung befindet sich also im Unendlichen. Die Vergrößerung wird daher mithilfe der deutlichen Sehweite des menschlichen Auges  $s_0 = 250\text{mm}$  gemäß der Vorlesung bestimmt:

$$V_L = \frac{s_0}{f} = 2,5 \quad (14)$$

#### Aufgabe 4: Spiegelteleskop

Ein Teleskop zur Betrachtung weit entfernter Sterne bestehe aus zwei sphärischen Spiegeln (vgl. Abbildung). Der Krümmungsradius des großen Spiegels (mit einem Loch im Zentrum) sei  $2,0\text{m}$ , der des kleinen Spiegels betrage  $0,6\text{m}$ . Der Abstand der Scheitel  $S_1$  und  $S_2$  der beiden Spiegel sei  $0,75\text{m}$ .



- Berechnen Sie den Abstand des bildseitigen Brennpunktes  $F$  des Spiegelsystems von Scheitel  $S_2$  des kleinen Spiegels (parallel einfallende Strahlen, vgl. Abbildung).
- Bestimmen Sie die effektive Brennweite der Anordnung beider Spiegel (effektive Brennweite = Brennweite einer Sammellinse mit gleichen abbildenden Eigenschaften wie das Spiegelsystem).
- Mithilfe eines Okulars ( $f_{Ok} = 2\text{cm}$ ) wird nun das reelle Zwischenbild des Sterns mit entspanntem Auge betrachtet. Berechnen Sie die Vergrößerung des Gesamtsystems.
- Was sind die Hauptvorteile von Spiegelteleskopen gegenüber Linsenteleskopen?

#### Lösung 4:

- Es gilt die Linsengleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (15)$$

Da  $g_1 = \infty$  und  $f_1 = \frac{r_1}{2}$  gilt  $b = \frac{r_1}{2}$ . Für die Bildweite gilt außerdem  $b = y + 0,75\text{m}$ , woraus folgt:

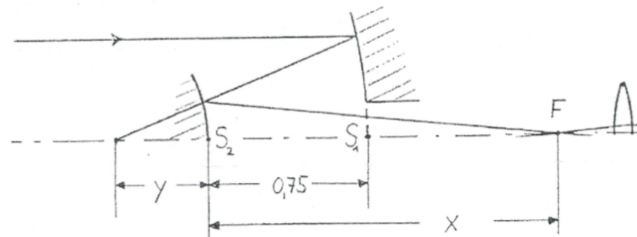
$$y = \frac{r_1}{2} - 0,75\text{m} = 0,25\text{m} \quad (16)$$

Der Bildpunkt wird nun vom zweiten Spiegel in den Brennpunkt F fokussiert, wobei nun darauf geachtet werden muss, dass  $y$  und  $r_2$  negative Vorzeichen besitzen müssen. Die Linsengleichung lautet dann

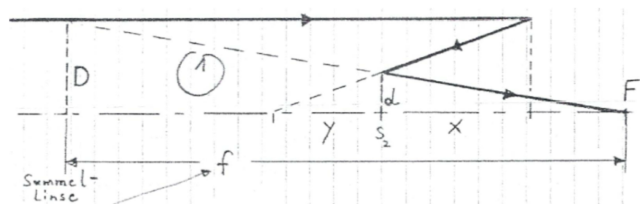
$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{2}{r_2}, \quad (17)$$

und auf  $x$  aufgelöst erhält man schließlich den Abstand des Brennpunktes F zum Scheitel  $S_2$  als

$$x = \frac{y \cdot r_2}{2y - r_2} = \frac{0,25 \cdot 0,6}{-0,5 + 0,6} \text{m} = 1,5 \text{m}. \quad (18)$$



- b) Wir konstruieren den Standort der Linse wie in der Zeichnung angedeutet und berechnen aus zwei Strahlensätzen



$$\frac{d}{D} = \frac{x}{f} \quad (19)$$

$$\frac{d}{D} = \frac{|y|}{|y| + 0,75 \text{m}} \quad (20)$$

$$\rightarrow f = \frac{(|y| + 0,75 \text{m}) \cdot x}{|y|} = 6 \text{m} \quad (21)$$

c)

$$V = \frac{f}{f_{Ok}} = \frac{600 \text{cm}}{2 \text{cm}} = 300 \quad (22)$$

- d) Es gibt zum einen keine chromatische Aberration (eine größere Bandbreite  $\Delta\lambda$  wird übertragen) und zum anderen sind Spiegel in größeren Durchmessern konstruierbar und justierbar, was eine höhere Lichtausbeute zur Folge hat.

### Aufgabe 5: Zoomobjektiv

Zwei dünne Linsen befinden sich im Abstand  $d$  zueinander und haben beide eine Brennweite von 70mm. Dadurch, dass der Abstand  $d$  veränderlich ist, soll ein Zoom-Objektiv realisiert werden.

- Was ist die minimale Brennweite des Zoomobjektivs und warum?
- Was ist die größte theoretische Brennweite, die mit dieser Anordnung erreicht werden kann? Was passiert, wenn der Abstand noch weiter vergrößert wird? Skizzieren sie den Strahlenverlauf durch das Objektiv in den beiden Grenzfällen minimaler und maximaler theoretischer Brennweite.
- Die maximale Brennweite soll  $f = 280\text{mm}$  betragen. Wie muss der Abstand der Linsen gewählt werden?

### Lösung 5:

- Wir verwenden wieder die Gleichung für ein Linsensystem

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (23)$$

und setzen  $f_1 = f_2 = 70\text{mm}$ . Wir sehen direkt, dass man die minimale Brennweite erhält, wenn der Abstand zwischen den beiden Linsen 0 ist. Dann gilt für die Brennweite des Systems:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{70\text{mm}} \rightarrow f = 35\text{mm} \quad (24)$$

- Die Brennweite im Abhängigkeit des Abstands lautet:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{70\text{mm}} - \frac{d}{4900\text{mm}^2} \quad (25)$$

Wir können die Brennweite theoretisch unendlich groß machen. Dies erreichen wir, wenn der Abstand zwischen den beiden Linsen gleich 140mm ist, da dann gilt  $\frac{1}{f} = 0$ . Wenn man den Abstand noch weiter vergrößert, wird die Brennweite negativ, wir erhalten also eine Streuwirkung.

- Mit Obiger Gleichung nach  $d$  aufgelöst erhält man mit  $f = 280\text{mm}$  für den Abstand zwischen den Linsen  $d = 122,5\text{mm}$ .

### Aufgabe 6: Pointillismus

Beim Pointillismus handelt es sich um eine Stilrichtung in der Malerei, die zwischen 1889 und 1910 ihre Blütezeit hatte. Sie ist durch eine besondere Maltechnik geprägt: Das gesamte Bild besteht aus kleinen regelmäßigen Farbtupfern mit einem Abstand von ca. 2mm. Der Gesamt-Farbeindruck ergibt sich deshalb erst bei Betrachtung aus einer gewissen Entfernung durch die optische Verschmelzung der Farbpunkte.

- a) Die menschliche Pupille habe einen Durchmesser von 3mm. Bei welcher Farbe setzt ein scheinbares Vermischen der Punkte durch Beugungseffekte zuerst ein?
- b) In welchem Abstand muss das Kunstwerk betrachtet werden, damit alle Farben vermischt sind?

### Lösung 6:

- a) Für das Auflösungsvermögen des Auges gilt mit dem Pupillendurchmesser  $D = 3\text{mm}$  nach dem Rayleigh-Kriterium:

$$\alpha_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (26)$$

Daraus lässt sich sofort erkennen, dass eine kleinere Wellenlänge  $\lambda$  auch einen kleineren Winkel minimaler Auflösung  $\alpha_{min}$  zur Folge hat. Die Farbe mit der besten Auflösung ist also violett, die mit der schlechtesten ist rot. Das Vermischen der Punkte setzt daher zuerst bei den roten Punkten ein.

- b) Da sich die violetten Farbpunkte als letztes vermischen, führen wir die Rechnung mit  $\lambda = 400\text{nm}$  durch. Zwei Punkte mit Abstand  $d = 2\text{mm}$  haben aus der Entfernung  $h$  betrachtet den Winkelabstand

$$\tan(\alpha) = \frac{d}{h}. \quad (27)$$

In Kleinwinkelnäherung gilt  $\tan(\alpha) = \alpha$ . Daraus folgt mit dem Rayleigh-Kriterium

$$\frac{d}{h} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (28)$$

und nach Auflösen  $h = 12,3\text{m}$ .