Ferienkurs Experimentalphysik 3

Wintersemester 2014/2015

Thomas Maier, Alexander Wolf

Lösung 1
Wellengleichung und Polarisation

Aufgabe 1: Wellengleichung

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei zirkular polarisiert und breite sich in z-Richtung aus:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz - wt) \\ \sin(kz - wt) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Berechnen Sie für diese Welle:

a) das B-Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$

b) den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r},t)$

c) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel α gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte, total absorbierende Ebene.

Lösung 1:

a)

$$\vec{B} = \frac{k}{w}\left(\vec{e}_z \times \vec{E}\right) \tag{2}$$

$$= E_0 \frac{k}{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(kz - wt) \\ \sin(kz - wt) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$= c_0 E_0 \begin{pmatrix} -\sin(kz - wt) \\ \cos(kz - wt) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

b)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{5}$$
$$= \frac{c_0 E_0^2}{\mu_0}\begin{pmatrix} \cos(kz-wt) \\ \sin(kz-wt) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(kz-wt) \\ \cos(kz-wt) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$
$$= \frac{c_0 E_0^2}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(kz-wt)+\sin^2(kz-wt) \end{pmatrix} \tag{7}$$
$$= c_0^2 \epsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z \tag{8}$$

c)

$$p_S = \frac{I_\perp}{c_0} = \frac{\langle \vec{S_\perp} \rangle}{c_0} = c_0 \epsilon_0 E_0^2 \frac{A_\perp}{A_0} \tag{9}$$

$\vec{k}$ fällt in einem Winkel von $90° - \alpha$ auf die absorbierende Fläche

$$A_\perp = A_0 \cos\alpha \qquad \rightarrow \qquad p_S = c_0 \epsilon_0 E_0^2 \cos\alpha \tag{10}$$

Aufgabe 2: Prisma

Ein gleichseitiges Prisma wird mit dem Licht einer Lampe bestrahlt. Das einfallende Licht treffe senkrecht auf eine Seite des Prismas.

a) Zeichnen Sie den Strahlengang.

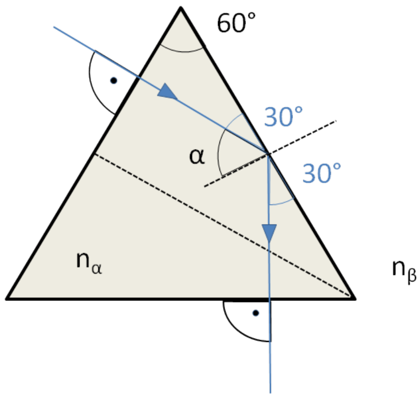
b) Um welchem Winkel sieht man rotes ($n_r = 1,54$) und violettes ($n_v = 1,56$) Licht im Bezug zur ursprünglichen Strahlrichtung abgelenkt?

Lösung 2:

a) Da der Strahl beim Eintreten in das Prisma senkrecht einfällt, findet keine Brechung statt. An der gegenüberliegenden Seite gilt grundsätzlich das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$n_\alpha \sin\alpha = n_\beta \sin\beta \tag{11}$$

Da jedoch ein Einfallswinkel von $\alpha = 60°$ resultiert, versagt hier das Snelliussche Gesetz und es findet Totalreflexion statt. Als Strahlengang erhält man schließlich:



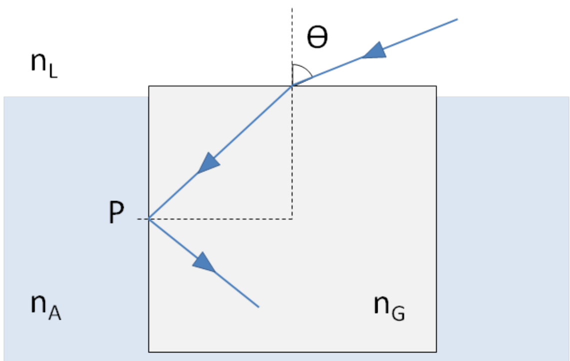
b) Der Strahlengang beider Strahlen ist identisch. Man erhält demnach für beide Strahlen einen Ablenkwinkel von 60° von der ursprünglichen Richtung.

Aufgabe 3: Quader in Alkohol

Ein Lichtstrahl trete aus Luft ($n_L = 1$) auf einen Plexiglasquader ($n_G = 1,50$), der fast komplett in Alkohol ($n_A = 1,36$) eingetaucht ist.

a) Berechnen Sie den Winkel Θ, für den sich am Punkt P Totalreflexion ergibt.

b) Wenn der Quader aus dem Alkohol gehoben wird, ergibt sich dann auch mit dem in a) berechneten Einstrahlwinkel am Punkt P Totalreflexion? Warum?



Lösung 3:

a) Damit am Punkt P Totalreflexion stattfindet muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_A}{n_G} \qquad \rightarrow \qquad \theta_2 = 65,1^\circ \tag{12}$$

Aus der Dreieckssumme folgt

$$\theta_1 = 90^\circ - \theta_2 = 25,0^\circ \tag{13}$$

Damit lässt sich mit Snellius der Einfallswinkel θ berechnen:

$$\sin\theta = n_G \sin\theta_1 \qquad \rightarrow \qquad \theta = 39,3^\circ \tag{14}$$

b) Der kritische Winkel für den Übergang Plexiglas/Luft berechnet sich aus

$$\sin\theta_b = \frac{1}{n_G} \qquad \rightarrow \qquad \theta_b = 41,8^\circ \tag{15}$$

Da $\theta_2 > \theta_b$ tritt nach Anheben des Quaders aus dem Alkohol ebenso Totalreflexion auf.

Aufgabe 4: Polarisationsgrad

Unpolarisiertes Licht der Intensität $I = I_\perp + I_\parallel$ fällt unter dem Brewster-Winkel auf eine Grenzfläche. Das Reflexionsvermögen für senkrechte Polarisation $R_\perp$ (Anteil der reflektierten und senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Intensität) betrage 0,2. Wie groß sind die Polarisationsgrade des reflektierten (P_r) und des transmittiert Lichts (P_t) in Abhängigkeit des Polarisationsgrads des eingestrahlten Lichts P_0?
Hinweis:

$$P_i := \frac{I_{\perp,i} - I_{\parallel,i}}{I_{\perp,i} + I_{\parallel,i}} \tag{16}$$

Lösung 4:

Im Brewsterwinkel gilt für den Reflexionskoeffizienten für parallele Polarisation $R_\parallel = 0$. Für den Polarisationsgrad des reflektierten und transmittierten Lichtes erhält man daher

$$P_r = \frac{I_\perp R_\perp - I_\parallel R_\parallel}{I_\perp R_\perp + I_\parallel R_\parallel} = \frac{I_\perp \cdot 0,2}{I_\perp \cdot 0,2} = 1 \tag{17}$$

$$P_t = \frac{I_\perp(1-R_\perp) - I_\parallel(1-R_\parallel)}{I_\perp(1-R_\perp) + I_\parallel(1-R_\parallel)} = \frac{I_\perp \cdot 0,8 - I_\parallel}{I_\perp \cdot 0,8 + I_\parallel} \tag{18}$$

Aus der Definition des Polarisationsgrades des einfallenden Lichts

$$P_0 = \frac{I_\perp - I_\parallel}{I_\perp + I_\parallel} \tag{19}$$

$$\rightarrow I_\perp = -I_\parallel \frac{P_0 + 1}{P_0 - 1} \tag{20}$$

erhält man schließlich als Polarisationgrad des transmittierten Lichtes:

$$P_t = \frac{0,8 \cdot \frac{P_0+1}{P_0-1} + 1}{0,8 \cdot \frac{P_0+1}{P_0-1} - 1} = \frac{1,8P_0 - 0,2}{0,2P_0 - 1,8} \tag{21}$$

Aufgabe 5: Fourier-Transformation

Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Amplitudenverteilungen im Frequenzraum:

a) $E(w) = E_0\ \delta(w - w_0)$

b) $E(w) = E_0\ \exp(-a|w|)$, $a \geq 0$

Lösung 5:

a)

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw\ E_0 \delta(w - w_0) e^{iwt} \tag{22}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{iw_0 t} \tag{23}$$

b)

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw\ E_0 e^{-a|w|} e^{iwt} \tag{24}$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} dw\ e^{aw} e^{iwt} + \int_{0}^{\infty} dw\ e^{-aw} e^{iwt} \right) \tag{25}$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} dw\ e^{w(a+it)} + \int_{0}^{\infty} dw\ e^{-w(a-it)} \right) \tag{26}$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+it} + \frac{1}{a-it} \right) \tag{27}$$

Aufgabe 6: Doppelbrechung

Ein Plättchen der Dicke d hat für die $\hat{x}$-polarisierte Strahlung den Brechungsindex $n_x(w) = 1 - \frac{\alpha}{w - w_0 + \Delta}$ und für die $\hat{y}$-polarisierte Strahlung den Brechungsindex $n_y(w) = 1 - \frac{\alpha}{w - w_0 - \Delta}$. Linear polarisierte Strahlung mit der Frequenz $w_0 + \delta$, welches in einem Winkel von 45° zu den x- und y-Achsen linear polarisiert ist, verlässt das Plättchen nach senkrechtem Einfall rechts/linkszirkular polarisiert. Bestimmen Sie die möglichen Werte von δ.

Lösung 6:

Berechnung der Phasendifferenz $\Delta\Phi$ als Funktion des Gangunterschiedes Δs:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s \tag{28}$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} d \left(n_x - n_y \right) \tag{29}$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} d \left(\frac{\alpha}{w - w_0 + \Delta} - \frac{\alpha}{w - w_0 - \Delta} \right) \tag{30}$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} d\alpha \left(\frac{1}{\delta + \Delta} - \frac{1}{\delta - \Delta} \right) \tag{31}$$
$$= \frac{-4\pi d\alpha\Delta}{\lambda \left(\delta^2 - \Delta^2 \right)} \tag{32}$$

Für rechts/linkszirkulare Polarisation nach dem Durchgang muss der Phasenunterschied folgende Bedingung erfüllen:

$$\Delta\Phi = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n & \text{rechtszirkular} \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n & \text{linkszirkular} \end{cases} \tag{33}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$. Man erhält schließlich als mögliche Werte für δ:

$$\delta = \pm\sqrt{\frac{4\pi d\alpha\Delta}{\lambda\left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\pi} + \Delta^2} \tag{34}$$

Aufgabe 7: Kleine Beweise

Für Motivierte ein paar kleine Beweise zur Thematik:

a) Zeigen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen eine Wellengleichung für das magnetische Feld $\vec{B}$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass jede lineare polarisierte Welle als Linearkombination aus zwei zirkular polarisierten Wellen beschrieben werden kann.

Lösung 7:

a) Es gilt das Maxwellsche Durchflutungsgesetz und das Maxwellsche Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{35}$$

Unter Bildung der Rotation des Durchflutungsgesetzes erhält man

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \tag{36}$$

$$= -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{37}$$

Aus der Definition gilt für die Rotation der Rotation des B-Feldes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \tag{38}$$

da magnetische Felder Quellfrei sind ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). Nach Gleichsetzen erhält man final die Wellengleichung:

$$\Delta\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{39}$$

b) Die Darstellung polarisierter Wellen mit Ausbreitung in z-Richtung ist:

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{i(kz-wt)} \qquad \text{mit} \qquad \vec{A} = A_0 \begin{cases} \hat{x} + i\hat{y} & \sigma^+\text{-Licht} \\ \hat{x} - i\hat{y} & \sigma^-\text{-Licht} \\ \hat{x} & \text{linear polarisiert} \end{cases} \tag{40}$$

Es gilt also für die Linearkombination von σ^+- und σ^--Licht:

$$\vec{E}^+ + \vec{E}^- = 2A_0\hat{x}e^{i(kz-wt)} \tag{41}$$