Fakultät für Physik
Technische Universität München
Bernd Kohler & Daniel Singh

Blatt 4 - Lösung
WS 2014/2015
26.03.2015

Ferienkurs Experimentalphysik 1

(★) - leicht
(★★) - mittel
(★★★) - schwer

Aufgabe 1: *Verständnisfragen (inkl. Wiederholung)*

a) Zeigen Sie, dass die harmonische Schwingung $x = x_m \cdot \sin(\omega t)$ eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung ist.

b) Was besagt das 3. Newton'sche Gesetz („Gegenwirkungsprinzip")?

c) Eine Punktmasse stößt zentral auf eine zweite ruhende Punktmasse. Die erste bleibt stehen, die zweite läuft weg. Ist der Stoß vollkommen unelastisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Zwei Punktmassen stoßen zusammen und bleiben am Ort des Stoßes liegen. Geben Sie an, um was für einen Stoß es sich handelt.

e) A sitzt in einem von der Umwelt isolierten Kasten, der sich gleichmäßig im Raum dreht. B sitzt in ebenso in einem anderen isolierten Kasten, der sich gleichförmig und geradlinig durch den Raum bewegt. Wer kann seine Bewegung feststellen - A, B, beide oder niemand?

f) Weisen Sie nach, dass bei äußerer Erregung und bei beliebiger Dämpfung die Resonatoramplitude verschwindet, wenn die Erregerfrequenz sehr groß wird. Wie lässt sich dies anschaulich erklären?

g) Ein langes Brett liegt an seinen Enden auf zwei Stützen. Warum biegt es sich hochkant gestellt weniger durch als flach aufliegend?

h) Erläutern Sie die Wirkungsweise eines Quecksilberbarometers.

i) Kann man mit einer Saugpumpe Wasser aus einem Brunnen 15 m hochpumpen?

j) In einem randvoll mit Wasser gefüllten Glas schwimmen Eisstücke. Läuft beim Schmelzen des Eises Wasser über?

k) Sie sitzen im Boot auf einem See und werfen Steine aus dem Boot ins Wasser. Sinkt, steigt oder bleibt der Wasserspiegel gleich?

l) Zeigen Sie, dass $I = A \cdot v$ gilt. (I: Strömungsstärke, A: Querschnittsfläche, v: Strömungsgeschwindigkeit)

m) Welchen Sinn hat das Schmieren und Ölen von Lagern?

n) Im Windkanal wird das Modell eines Stromlinienkörpers im zehnfach verkleinerten Maßstab geprüft. Dabei wird eine kritische Geschwindigkeit v_1 für den Übergang zur turbulenten Strömung festgestellt. Wie groß ist unter sonst vergleichbaren Bedingungen die kritische Geschwindigkeit v_0 für das Original?

Lösung:

a) Die Bewegung ist ungleichmäßig beschleunigt, da die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit nicht konstant ist:

$$\dot{x} = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad , \quad \ddot{x} = -x_m \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \neq const. \tag{1}$$

b) Das Gegenwirkungsprinzip besagt, dass eine Kraft, die auf einen Körper wirkt, stets von einem anderen Körper ausgeht. An diesem zweiten Körper greift eine gleich große, entgegengesetzte Kraft an: **actio = reactio**

c) Nein. Die Punktmassen haben unterschiedliche Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

d) Es handelt sich um einen inelastischen Stoß.

e) Nur A ist in der Lage seine Bewegung festzustellen, da er/sie sich nicht in einem Inertialsystem befindet, denn ein sich drehendes System ist ein beschleunigtes Bezugssystem.

f) Setzt man nun in die Formel für $x_m = \frac{\frac{F_m}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\omega\delta)^2}}$ die Erregerfrequenz $\omega \to \infty$ ein, so folgt $x_m = 0$. Die Feder kann die Punktmasse nicht mehr bewegen, weil bei endlich großen Auslenkungen die Beschleunigung unendlich groß wäre und dazu eine unendlich große Kraft gebraucht würde.

g) Die Durchbiegung ist umgekehrt proportional zu dem Flächenmoment J_F. J_F ist aber beim hochkant gestellten Brett wesentlich größer als beim flach liegenden Brett, da viele Flächenelemente im Fall des hochkant gestellten Brettes relativ weit von der neutralen Faser entfernt sind.

h) Der Luftdruck an der Quecksilberoberfläche ist stets im Gleichgewicht mit dem Schweredruck, den die Quecksilbersäule erzeugt. Über der Quecksilbersäule ist Vakuum, d. h. $p = 0$. Bei Normaldruck $p_a = 101{,}3\,\mathrm{kPa}$ hat die Säule eine Höhe von 760 mm, denn es gilt mit $\rho = 13{,}59 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

$$p_a = \rho \cdot g \cdot h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{p_a}{\rho \cdot g} = 0{,}760\,\mathrm{m} \tag{2}$$

i) Die Pumpe saugt die Luft aus dem Steigrohr über dem Wasserspiegel ab. Das Wasser wird durch den äußeren Luftdruck p_0 hochgedrückt. Der Schweredruck der Wassersäule kann deshalb höchstens gleich p_0 werden:

$$p_o = \rho \cdot g \cdot h_{max} \qquad \Rightarrow \qquad h_{max} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} = 10{,}3\,\mathrm{m} \tag{3}$$

Eine Saughöhe von 15 m kann somit nicht erreicht werden.

j) Es läuft kein Wasser über. Der Flüssigkeitsspiegel bleibt unverändert. Das Eis verdrängt so viel Wasser, wie seiner Masse entspricht (*Prinzip von ARCHIMEDES*). Dieses Volumen füllt es genau aus, wenn es zu Wasser geworden ist.

k) Der Wasserspiegel sinkt. Unter Wasser verdrängt der Stein sein eigenes Volumen, im Boot aber verdrängt er ein größeres Volumen, da er eine größere Dichte hat als das Wasser. Es herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen Gewichtskraft und Auftriebskraft.

Konkretes Beispiel: Ein zwei Kilogramm schwerer Stein mit einem Volumen von einem Liter verdrängt unter Wasser einen Liter, im Boot schwimmend aber zwei Liter Wasser. Wirft man den Stein vom Boot aus ins Wasser, sinkt der Wasserspiegel zunächst um die Menge, die zwei Litern entspricht. Beim Eintauchen des Steins steigt der Wasserspiegel dann um die Menge an, die einem Liter entspricht: Zusammengerechnet sinkt also der Pegel im See um die Menge, die einem Liter entspricht.

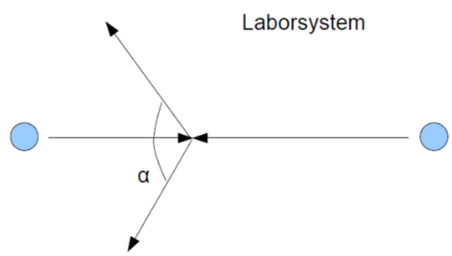
l) Die Strömungsstärke ist nach Definition der Volumenstrom pro Zeit, also $I = \frac{dV}{dt}$. Das infinitesimale Volumenelement wird umgeschrieben zu $dV = A \cdot ds$. Es folgt $I = A \cdot \frac{ds}{dt} = A \cdot v$.

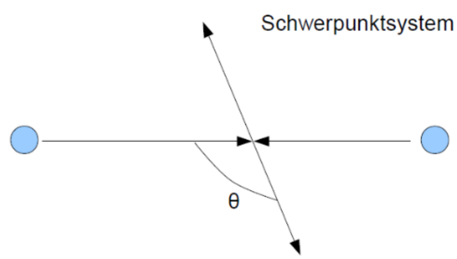
m) Die äußere Reibung wird durch innere Reibung (im Schmiermittel) ersetzt. Die Reibungskraft wird geringer und die Lager verschleißen weniger.

n) Für Original und Modell müssen die kritischen Reynoldsschen Zahlen übereinstimmen $Re_0 = Re_1$. Die Dichte ρ und Viskosität η der Luft in beiden Fällen gleich sind, folgt aus $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$ der Zusammenhang $d_0 \cdot v_0 = d_1 \cdot v_1$. Der Verkleinerungsmaßstab ist $\frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{10}$. Damit ist $v_0 = 0,1 \cdot v_1$. Es ist auffällig, dass bei verkleinerten Abmessungen des Modells die Strömungsgeschwindigkeit vergrößert werden muss.

Aufgabe 2: *Schwerpunktsystem* (★★)

Zwei Kugeln der gleichen Masse mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $-3\vec{v}$ stoßen elastisch aufeinander. Der Ablenkungswinkel im Schwerpunktsystem sei θ. Was ist der Winkel α im Laborsystem?





Lösung:

Zuerst berechnet man die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems, die durch

$$\vec{u} = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(\vec{v} - 3\vec{v})}{2m} = -\vec{v} \tag{4}$$

gegeben ist.

Die Geschwindigkeiten der Kugeln im Schwerpunktsystem sind also 2v und -2v. Dann berechnen wir die Komponenten der Endgeschwindigkeiten nach dem Stoß. Wenn die x-Achse parallel zu v ist, dann sind im Schwerpunktsystem die Anfangsgeschwindigkeiten

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Der Impulserhalt bei gleichen Massen besagt, dass auch die Endgeschwindigkeiten entgegengesetzt sind, also:

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot cos(\theta) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \end{pmatrix} \cdot sin(\theta) = \begin{pmatrix} 2vcos(\theta) \\ 2vsin(\theta) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Genauso ist dann

$$\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} -2vcos(\theta) \\ -2vsin(\theta) \end{pmatrix} \tag{7}$$

Diese Geschwindigkeiten werden nun zurück ins Laborsystem transformiert, indem $\vec{u} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix}$ zu den beiden Vektoren dazu addiert wird:

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 2cos(\theta) - 1 \\ 2sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot v \quad , \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -2cos(\theta) - 1 \\ -2sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot v \tag{8}$$

Um α zu erhalten, muss der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{V}_1$ und $\vec{V}_2$ berechnet werden:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \tag{9}$$

$$\frac{(2cos(\theta) - 1)(-2cos(\theta) - 1) + (2sin(\theta))(-2sin(\theta))}{\sqrt{(2cos(\theta) - 1) + 4sin^2(\theta)} \cdot \sqrt{(2cos(\theta) + 1) + 4sin^2(\theta)}} = \tag{10}$$

$$\frac{1-4cos^2(\theta)-4sin^2(\theta)}{\sqrt{5-4cos(\theta)}\cdot\sqrt{5+4cos(\theta)}} = \tag{11}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{25-16cos^2(\theta)}} \tag{12}$$

Der Cosinus ist immer negativ, also ist der Winkel immer > 90°.

Aufgabe 3: *Die fortschreitende Welle* (★)

Eine Transversalwelle breitet sich als ebene Welle in einem Medium aus, welches aus Einzelteilchen der Masse M = 1g besteht. Dabei werde die Auslenkung u der Teilchen aus der Ruhelage beschrieben durch die Gleichung

$$u(x,t) = 0,1m\cdot sin\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0,4s}-\frac{x}{4m}\right)\right]$$

a) Berechnen Sie die Wellenlänge λ und die Kreisfrequenz ω dieser Welle.

b) Geben Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle an.

c) Welche kinetische Energie E_{KIN} hat ein Teilchen bei x = 0,8m nach t = 4s?

d) Welchen minimalen Abstand x_{MIN} vom Ursprung der Welle x = 0 hat ein Teilchen, dessen kinetische Energie im selben Moment (bei t = 4s) die Hälfte der Gesamtenergie beträgt?

Lösung:

a) Die allgemeine Form einer Wellengleichung ist

$$y(x,t) = sin(\omega t - kx)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\omega = \frac{2\pi}{0,4s} = 5\pi s^{-1} = 15,7s^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4m} \Rightarrow \lambda = 4m$$

b) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle ist definiert als

$$c = \lambda f$$

mit $\omega = 2\pi f$

$$c = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4m \cdot 5\pi s^{-1}}{2\pi} = 10\frac{m}{s}$$

c) Zuerst berechnen wir die Teilchengeschwindigkeit v. Dies ist nicht die *Wellen*geschwindigkeit c, sondern

$$v = \frac{du}{dt} = 0,1m \cdot cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right] \cdot 5\pi s^{-1} = 0,5\pi\frac{m}{s}cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right]$$

Die kinetische Energie ist dann:

$$E_{KIN} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{8}M\pi^2\frac{m}{s}cos^2\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right]$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$E_{KIN} = \frac{1}{8}\pi^2\frac{m^2}{s^2} \cdot 10^{-3}cos^2\left[2\pi \cdot \left(\frac{4s}{0,4s} - \frac{0,8m}{4m}\right)\right] = 0,12mJ$$

d) Zuerst bestimmen wie die Gesamtenergie eines Teilchens. Diese ist gleich der maximalen kinetischen Energie

$$E_{GES} = E_{KIN,MAX} = \frac{M\pi^2}{8}mJ = 1{,}23 \times 10^{-3}\,\mathrm{mJ}$$

Also folgt

$$\frac{E_{KIN}}{E_{GES}} = cos^2\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right) = \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Hier haben wir eine zeit- und ortsabhängige Bestimmungsgleichung für Teilchen passender Energie. Einsetzen von t = 4s und Auflösen nach x liefert

$$x = (39,5 - n)\ m$$

Woraus sofort der minimale Wert für die Ruhelage

$$x_{MIN} = 0,5\ m$$

folgt.

Aufgabe 4: *Stehende Seilwelle* (★★)

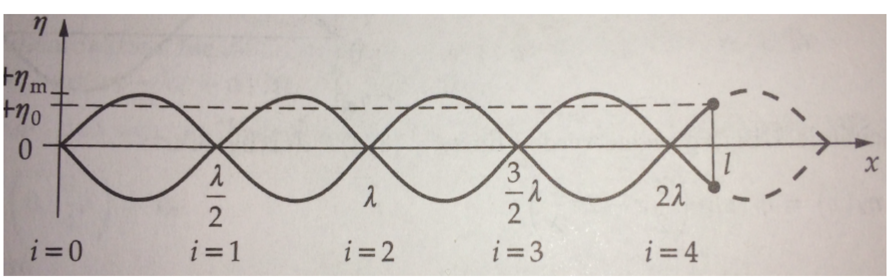
Ein Seil ist an einem Ende (x = 0) fest eingespannt und wird am anderen Ende (x = l) zu einer harmonischen Schwingung erregt, für die $u = u_0 sin(2\pi f t)$ gilt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist c. [l = 49cm f=10s^{-1} c=2,4m/s u_0 = 1,6mm]

a) An welchen Stellen x_i befinden sich die Schwingungsknoten der stehenden Welle?

b) Stellen sie die Wellenfunktion u(x,t) für die stehende Welle auf!

Lösung:

a) Der erste Knoten befindet sich am fest eingespannten Ende, die weiteren folgen in Abständen von $\frac{\lambda}{2}$:
$x_i = i\frac{\lambda}{2}$ mit $\lambda = \frac{c}{f} = 24cm$
Aus der Bedingung $x_i < l$ folgt der größte Wert für i:
$i\frac{\lambda}{2} < l \quad i < \frac{2l}{\lambda} = 4,08$
Da i ganzzahlig sein muss, gilt i=0,1,2,3,4 und x_0 = 0cm, x_1 = 12cm , x_2 = 24cm , x_3 = 36cm, x_4 = 48cm



b) Die stehende Welle ist eine Schwingung mit ortsabhängiger Amplitude. Aus der Erregerschwingung

$$u(l,t) = u_0 sin(2\pi f t)$$

lässt sich ableiten, dass die Wellenfunktion die Form

$$u(x,t) = A(x) sin(2\pi f t)$$

hat. Die Amplitudenfunktion A(x) muss die Randbedingungen A(0) = 0 und A(l) = u_0 erfüllen. Die Bedingung A(0) wird durch die Sinusfunktion erfüllt:

$$A(x) = u_0 sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

u_m folgt aus A(l) = u_0:

$$u_0 = u_m sin\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)$$

$$u_m = \frac{u_0}{sin\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)} = 6,2mm$$

Mit dem Ausdruck für u_m erhält man die Wellenfunktion:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{sin\left(2\pi\frac{l}{\lambda}\right)} \cdot sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \cdot sin(2\pi f t)$$

Aufgabe 5: *Die Scheibenbremse* (★)

Bei einer hydraulischen Scheibenbremse, wie sie in den meisten modernen Autos verbaut ist, drückt man mit dem Bremspedal auf einen Kolben, der in dem hydraulischen Bremssystem einen Druck aufbaut. Dieser Druck wird mit dem Bremsleitungen bis zu den Kolben im Bremssattel geleitet, die dann die Bremsbeläge auf die Bremsscheibe drücken.

a) Was sollte ein Konstrukteur bei der Konstruktion der verschiendenen Kolben beachten?

b) Wenn der Fahrer 100N auf den am Pedal befestigten Kolben ausübt, der eine Fläche von 1cm² hat und der Kolben am Bremsbelag eine Fläche von 30cm², welche Kraft übt der Belag dann auf die Scheibe aus?

c) Was bedeutet es für die Bremskraft (Kraft, die den Belag auf die Scheibe drückt), wenn man bei gleicher Kraft des Fahrers mehrere Bremsbeläge mit gleich großen Flächen an das System anschließt? Was verändert sich, wenn man das tut?

Lösung:

a) Er sollte für den Kolben am Pedal eine möglichst kleine und für den Kolben am Bremsbelag eine möglichst große Fläche wählen, damit die Kraft des Fahrers zum Bremsen verstärkt wird.

b)
$$p_F = \frac{F_F}{A_F} = \frac{F_B}{A_B} = p_B$$
$$F_B = F_F\frac{A_B}{A_F} = 100N\frac{30cm^3}{1cm^3} = 3kN$$

c) Die Bremskraft, verändert sich dadurch nicht, da der Druck nicht verändert wird. Der Weg, um den sich die einzelnen Bremsbeläge auf die Scheibe zubewegen (wenn der Pedalkolben sich um einen vorgegebenen Weg bewegt) wird kleiner. Da Bremsen, aber so gebaut werden, dass der Weg, zwischen Belag und Scheibe ohne Schleifen minimal ist, ist das kein Problem.

Aufgabe 6: *Schwimmen oder Untergehen?* (★)

Sie sind auf Urlaub in Israel und unternehmen eine Tagesfahrt an das Tote Meer. Die durchschnittliche Dichte des menschlichen Körpers ist 1,02g/cm^3, die des Toten Meeres ist 1,24g/cm^3. Wenn Sie den menschlichen Körper als Zylinder homogener Dichte annähern mit Höhe bzw. Grö ße 1,7m, welcher Anteil des Körpers (in %) ist dann über Wasser, wenn man sich einfach treiben lässt?

Lösung:

Das verdrängte Wasser muss die gleiche Masse wie der Körper besitzen.

$$h_W \rho_W A g = h \rho_M A g \tag{13}$$

Also ist die Höhe über Wasser $h_Ü$:

$$h_Ü = h - h_W = h\left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_W}\right) = 30cm \tag{14}$$

Aufgabe 7: *Der Wasserturm* (★)

Sie betrachten einen vollen Wasserturm. In diesem ist Wasser bis 30m über dem Boden, wo Sie stehen. Von dem Wasserturm führt eine Leitung zu einem Hydranten am Boden (h = 0). Der Wasserturm ist luftdicht verschlossen, also kann keine Luft nachfließen, wenn Wasser herausfließt. Die Dichte von Wasser ist $1000\frac{kg}{m^3}$. Rechnen sie mit g = $10\frac{m}{s^2}$! Der Luftdruck beträgt 1bar.

a) Bestimmen sie den Druck, den das Wasser auf den Hydrantenanschluß ausübt!

b) Sie öffnen nun den Hydranten. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser heraus?

c) Wie hoch würde das Wasser kommen, wenn man es nach oben leitet?

Lösung:

a)

$$p = \rho \cdot g \cdot h = 1000 \cdot 10 \cdot 30 Pa = 3bar \tag{15}$$

b)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{16}$$

$$3bar = 1bar + \frac{1}{2}1000\frac{kg}{m^3}v^2 \tag{17}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot kg \cdot m^3}{1000m \cdot s^2 kg}} = 20\frac{m}{s} \tag{18}$$

c)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \tag{19}$$

$$h = \frac{20^2}{2 \cdot 10}m = 20m \tag{20}$$

Weil der Luftdruck nicht auch oben auf das Wasser drückt, kommt das Wasser nicht mehr zur Ausgangshöhe.

Aufgabe 8: *Die Taucherflasche* (★)

Eine Stahlflasche von 20L Volumen ist für einen Maximaldruck von 300 Bar zugelassen. Die Flasche wird mit reinem Sauerstoff (welcher als O_2 vorliegt und als ideales Gas betrachtet wird) gefüllt. *Hinweis:* Atomgewicht von $^{16}O = 16u$

a) Welche Masse Sauerstoff darf eingefüllt werden, wenn mit Temperaturen bis zu 50°C zu rechnen ist und die Flasche nicht über den Toleranzbereich kommen soll?

b) Wie hoch ist der Druck in der Flasche bei T = 20°C, wenn der Maximaldruck bei 50°C erreicht wird?

c) Wie groß ist die Kraft, die bei 300 Bar auf die kreisrunde Ventilöffnung (Durchmesser 2mm) wirkt?

Lösung:

a)

$$pV = nRT \tag{21}$$

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{300 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot (273 + 50)} mol = 223 mol \tag{22}$$

$$m = nM = 233 \cdot 32 \frac{mol \cdot g}{mol} = 7,1kg \tag{23}$$

b)

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{223 \cdot 8,314 \cdot (273 + 20)}{20 \cdot 10^{-3}} Pa = 272 bar \tag{24}$$

c)

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A = 300 \cdot 10^5 \pi 0,001^2 N = 94N \tag{25}$$

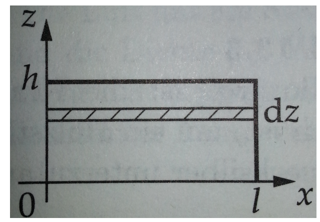
Aufgabe 9: *Belastung einer Staumauer* (★★)

Mit welcher Kraft drückt Wasser in horizontaler Richtung gegen eine Staumauer, wenn die Wasserstandshöhe $h = 6{,}0\,\text{m}$ über die gesamte Länge $l = 30\,\text{m}$ konstant ist?

Lösung:

Die Kraft des Wassers in horizontaler Richtung gegen die Staumauer ist von der Höhe z abhängig:

$$dF_W = p(z)\ dA \tag{26}$$



Dabei ist

$$p(z) = \rho_W \cdot g \cdot (h - z) \tag{27}$$

der Schweredruck in der Tiefe $(h - z)$ unter dem Wasserspiegel. Mit $dA = l\ dz$ folgt weiter

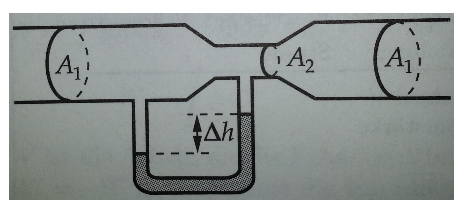
$$dF_W = \rho_W \cdot g \cdot (h - z) \cdot l\ dz \tag{28}$$

Die auf die gesamte Mauer wirkende Kraft des Wassers in horizontaler Richtung erhält man durch Integration:

$$F_W = \int_0^h \rho_W \cdot g \cdot l \cdot (h - z)\ dz = \rho_W \cdot g \cdot l \left[h \cdot z - \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{2} \cdot \rho_W \cdot g \cdot l \cdot h^2 = 5{,}3\,\text{MN} \tag{29}$$

Aufgabe 10: *Venturi-Düse* (★★)

Durch eine Rohrleitung mit der Querschnittsfläche $A_1 = 100\,\text{cm}$ strömt Luft (Dichte $\rho_L = 1{,}3\,\text{kg/m}^3$) mit der Stromstärke $I = 2{,}0\,\text{m}^3/\text{min}$. In der Rohrleitung befindet sich eine Verengung mit der Querschnittsfläche $A_2 = 20\,\text{cm}$ (Venturi-Rohr).



a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 strömt die Luft durch das Rohr?

b) Welche Höhendifferenz Δh zeigt der Wasserspiegel das angeschlossenen Manometers an?

Lösung:

a) Die Geschwindigkeit v_1 ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 = \frac{I}{A_1} = 3{,}3\,\mathrm{m/s} \tag{30}$$

b) Einen Ansatz für die Höhendifferenz Δh erhält man aus der Gleichung

$$\Delta p = \rho_W \cdot g \cdot \Delta h \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho_W \cdot g} \tag{31}$$

Die Bernoullische Gleichung liefert eine Formel für die Druckdifferenz Δp:

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot v_2^2 \tag{32}$$

oder

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{33}$$

Die beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 werden mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung bestimmt:

$$v_1 = \frac{I}{A_1} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \frac{I}{A_2} \tag{34}$$

Setzt man diese beiden Gleichungen in Gleichung 33 ein, so erhält man

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot I^2 \cdot \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) \tag{35}$$

oder

$$\Delta p = \frac{\rho_L \cdot I^2}{2 \cdot A_1^2 \cdot A_2^2} \cdot \left(A_1^2 - A_2^2\right) \tag{36}$$

Setzt man nun 36 in 31 ein, so erhält man die gesuchte Höhendifferenz Δh:

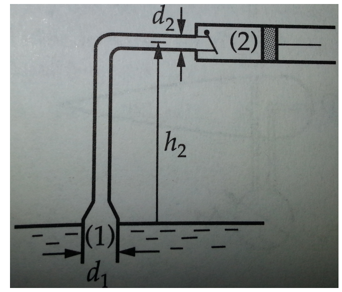
$$\Delta h = \ \Delta p = \frac{\rho_L \cdot I^2 \cdot \left(A_1^2 - A_2^2\right)}{2 \cdot \rho_W \cdot g \cdot A_1^2 \cdot A_2^2} \cdot \left(A_1^2 - A_2^2\right) \tag{37}$$

Mit $\rho_W = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ und den anderen gegebenen Größen erhält man

$$\Delta h = 1{,}8\,\mathrm{cm} \tag{38}$$

Aufgabe 11: *Strömung mit Höhenunterschied* (★★)

Das Ende des Saugrohrs einer Wasserpumpe mit dem Durchmesser $d_1 = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ taucht in ein wassergefülltes Vorratsbecken ein. Der Durchmesser des Rohres am Pumpenanschluss sei $d_2 = 10{,}0\,\mathrm{cm}$. Das Wasser wird auf die Höhe $h_2 = 300\,\mathrm{cm}$ gepumpt und strömt mit der Geschwindigkeit $v_2 = 4{,}00\,\mathrm{m/s}$ in die Saugpumpe. Wie groß ist der Druck p_2 beim Eintritt des Wassers in die Pumpe. (äußerer Luftdruck: $p_L = 101\,\mathrm{kPa}$)



Lösung:

Bezeichnet man die Stelle am Wasserspiegel mit (1), die Anschlusstelle des Rohres an die Pumpe mit (2), so ergibt sich die Bernoullische Gleichung in der Form

$$p_L + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_1^2 = p_2 + \rho\cdot g\cdot h_2 + \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2 \tag{39}$$

oder

$$p_2 = p_L - \rho\cdot g\cdot h_2 - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot(v_2^2 - v_1^2) \tag{40}$$

Die Geschwindigkeit v_1 folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$v_1\cdot A_1 = v_2\cdot A_2 \qquad \text{liefert mit} \qquad A = \frac{\pi}{4}d^2: \qquad v_1 = v_2\cdot\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \tag{41}$$

Man erhält somit den gesuchten Druck

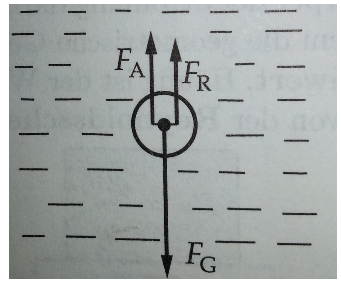
$$p_2 = p_L - \rho\cdot g\cdot h_2 - \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot v_2^2\cdot\left[1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)\right]^4 = 64{,}1\,\mathrm{kPa} \tag{42}$$

Aufgabe 12: *Viskositätsbestimmung* (★★)

Zur Messung der dynamischen Viskosität η von Öl mit der Dichte $\eta_{Öl} = 0{,}91\,\mathrm{kg/dm^3}$ lässt man eine kleine Metallkugel mit der Masse $m = 0{,}20\,\mathrm{g}$ und dem Durchmesser $d = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ unter dem Einfluss der Schwerkraft in Öl sinken. Die Kugel durchfällt eine markierte Strecke $s_1 = 25\,\mathrm{cm}$ in der Zeit $t_1 = 12\,\mathrm{s}$ mit konstanter Geschwindigkeit (Höppler-Viskosimeter). Wie groß ist die dynamische Viskosität η?

Lösung:

Da die Gewichtskraft F_G der Kugel größer als die Auftriebskraft F_A ist, sinkt die Kugel zunächst beschleunigt. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird die Reibungskraft $F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot \frac{d}{2} \cdot v$ größer. Nach kurzer Zeit stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein:



$$F_G = F_A + F_R \tag{43}$$

$$m \cdot g = m_{Öl} \cdot g + 3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d \cdot v_1 \tag{44}$$

Die Kugel bewegt sich nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 weiter. Dieses Kräftegleichgewicht stellt sich in Flüssigkeiten in hoher Viskosität sehr schnell ein.

Mit $m_{Öl} = \rho_{Öl} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3$ und $v_1 = \frac{s_1}{t_1}$ folgt weiter

$$m \cdot g = \rho_{Öl} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \cdot g + 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot \frac{s_1}{t_1} \tag{45}$$

Durch Umformung erhält man die gesuchte Größe:

$$\eta = \left(\frac{m}{\pi \cdot d} - \frac{\rho_{Öl} \cdot d^2}{6} \right) \cdot \frac{g \cdot t_1}{3 \cdot s_1} \tag{46}$$

$$\eta = \left(\frac{2 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}}{\pi \cdot 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} - \frac{0{,}91 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 25 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{6\,\mathrm{m}^3} \right) \cdot \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 12\,\mathrm{s}}{3 \cdot 0{,}25\,\mathrm{m}} \tag{47}$$

$$\eta = 1{,}4\,\mathrm{Pa\,s} \tag{48}$$

Aufgabe 13: *Flummi* (★)

Ein großer Flummi ($m = 500\,\mathrm{g}$) fällt aus der Höhe $h = 1{,}8\,\mathrm{m}$, dabei verliert er bei jedem Aufprall auf dem Boden 8 % seiner kinetischen Energie.

a) Wie schnell ist der Ball kurz vor dem ersten Aufprall?

b) Wie oft springt der Ball maximal, bis er beim Aufprall weniger als die Hälfte dieser anfänglichen Geschwindigkeit besitzt?

c) Wie weit wird eine Feder mit $D = 4000\,\mathrm{N/m}$ eingedrückt, falls der Flummi auf dieser statt dem Boden landet?

Lösung:

a) Die Geschindigkeit des Flummis vor dem ersten Aufprall folgt direkt aus der **Energieerhaltung**:

$$E_{kin} = E_{pot} \tag{49}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 5{,}94\,\mathrm{m/s} \tag{50}$$

b) Die Energie des Balls kurz nach dem n-ten Aufprall beträgt mit $E_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$

$$E(n) = 0,92^n \cdot E_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(n) \tag{51}$$

und entsprechend folgt seine Geschwindigkeit zu

$$v(n) = \sqrt{0,92}^n \cdot v_0 \tag{52}$$

Nun soll gelten $v(n) < \frac{v_0}{2}$ und wir können nach n auflösen

$$v(n) = \sqrt{0,92}^n \cdot v_0 < \frac{v_0}{2} \quad \Rightarrow \quad n > \log_{\sqrt{0,92}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(\sqrt{0,92})} \approx 16,6 \tag{53}$$

Also besitzt der Ball nach 17-maligen Aufhüpfen weniger als die Hälfte seiner anfänglichen Geschwindigkeit vor dem ersten Aufprall.

c) Wie weit die Feder zusammengedrückt wird, folgt wieder aus der Energieerhaltung:

$$E_{Feder} = E_{pot} \tag{54}$$

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = m \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{D}} = 6{,}6\,\mathrm{cm} \tag{55}$$