Fakultät für Physik
Technische Universität München
Bernd Kohler & Daniel Singh

Blatt 3 - Lösung
WS 2014/2015
25.03.2015

# Ferienkurs Experimentalphysik 1

(★) - leicht
(★★) - mittel
(★★★) - schwer

## Aufgabe 1: *Verständnisfragen*

a) Welche Formeln gibt es, die den Drehimpuls L enthalten?

b) Unter welchen Voraussetzungen gilt Drehimpulserhaltung?

c) Wie groß ist das Drehmoment einer Kraft $\vec{F}$ bezüglich eines Drehpunktes, der auf ihrer Wirkungslinie liegt?

d) Welche Kugel gelangt schneller einen Hang hinab - eine rollende oder eine rutschende?

e) Geben Sie die Formel für die Berechnung des Trägheitsmomentes $J_A$ einer Punktmasse $m$ an, die im Abstand $r$ um eine Achse rotiert.

f) Die meisten Hubschrauber haben eine große Tragluftschraube mit vertikaler Drehachse und eine kleine Heckluftschraube mit horizontaler Drehachse. Welchen Zweck erfüllt diese Heckluftschraube?

g) Was verändert sich im Allgemeinen wenn eine Kraft an einem anderen Punkt eines Körpers angreift, was nicht?

h) Was ist die Poissonzahl $\mu$? Was bedeutet eine negative Poissionzahl?

i) Wie kann man experimentell die Zerreißfestigkeit $\sigma_B$ (auch Bruchspannung genannt) eines Materials ermitteln?

j) Wie funktioniert eine Hebebühne in der Autowerkstatt?

**Lösung:**

a) $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ Definition des Drehmoments M
$\vec{L} = I\vec{\omega}$ Zusammenhang mit Trägheitsmoment und Drehgeschwindigkeit.
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Definition des Drehimpulses

b) Der Gesamtdrehimpuls ist in einem abgeschlossenem System immer erhalten.

c) Das Drehmoment ist Null, da der senkrechte Abstand $a$ der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse Null ist und $M = F \cdot a$ gilt.

d) Die rutschende Kugel ist schneller, da sich bei der rollenden Kugel die freiwerdende potentielle Energie in kinetische Energie und Rotationsenergie aufteilt.

e) $J_A = \int r^2 dm = r^2 \cdot \int dm = m \cdot r^2$

f) Bei gleichförmiger Rotation der großen Tragluftschraube ist das Drehmoment das Motors entgegengesetzt gleich groß dem Drehmoment, das die Luftwiderstandskraft (an den Luftschraubenblättern) erzeugt. Da der Motor mit dem Rumpf verbunden ist, würde dieser im Gegenuhrzeigersinn zur Tragschraube rotieren. Um das zu vermeiden, erzeugt die Heckluftschraube mir ihrer Zugkraft ein Gegendrehmoment.

g) Das auf den Körper wirkende Drehmoment ändert sich. Da die Kraft und die Richtung gleich bleiben, bleibt auch die Änderung des Impulses (also auch der Geschwindigkeit) gleich.

h) Die Poissonzahl $\mu$ beschreibt das Verhalten eines Materials in die anderen Raumrichtung, wenn dieses in eine Raumrichtung gedehnt oder gestaucht wird.

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \tag{1}$$

l ist dabei die Ausdehnung in Kraftrichtung, d die Ausdehnung senkrecht zur Kraft.
Eine negative Poissonzahl bedeutet, dass sich ein Körper den man in eine Richtung zusammendrückt von selbst in den anderen Richtungen zusammenzieht.

i) Ein Stab mit der Querschnittsfläche $A$ aus diesem Material wird durch eine Zugkraft bis zum Bruch belastet. Die dabei maximal auftretende Kraft $F_{max}$, dividiert durch die ursprüngliche Querschnittsfläche $A$, ergibt die Bruchspannung $\sigma_B = \frac{f_{max}}{A}$. $\sigma_B$ wird auch Zereißfestigkeit genannt.

j) Bei einer hydraulischen Hebebühne wird mit einem kleinen Kolben Druck auf ein Öl ausgeübt, das dann einen großen Kolben hebt, der die Hebebühne trägt. Wenn der kleine Kolben zurück geht, kommt das Öl aber aus einem Vorratsbehälter. So kann die Hebebühne weiter angehoben werden. Beim Herunterlassen, drückt das Gewicht der Bühne das Öl wieder in den den Vorratsbehälter.

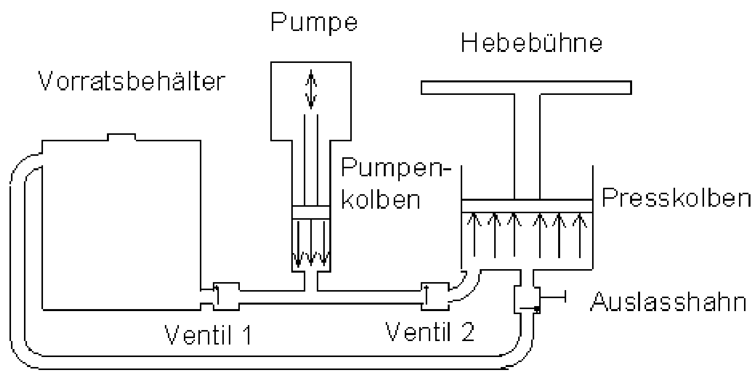



Abbildung 1: Darstellung des Prinzips einer hydraulischen Hebebühne

**Aufgabe 2:** *Erhaltungssätze* (★★)

Die Kreisbahn ist ein Sonderfall der Zentralbewegung.

a) Leiten Sie für das Gravitationsfeld den Zusammenhang zwischen der Energie $E$ und dem Drehimpuls $L$ her, der bestehen muss, damit eine Kreisbewegung zustande kommt.

b) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen Umlaufdauer $T$ und Kreisbahnradius $r$ her.

Es wird vorausgesetzt, dass die Masse $m_0$ des zentralen Körpers groß gegenüber der Masse $m$ des umlaufenden Körpers ist.

**Lösung:**

a) Für die Energie $E$ und den Drehimpuls $L$ gelten die Beziehungen

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot m \cdot m_0}{r} \tag{2}$$

$$L = m \cdot v \cdot r \tag{3}$$

Die für die Kreisbewegung erforderliche Radialkraft wird durch die Gravitationskraft erzeugt:

$$-m \cdot \frac{v^2}{r} = -G\frac{m \cdot m_0}{r^2} \tag{4}$$

Daraus ergibt sich

$$v^2 = \frac{G \cdot m_0}{r} \tag{5}$$

Aus $E$ und $L$ wird zunächst $v$ eliminiert:

$$E = -\frac{G \cdot m \cdot m_0}{2r} \tag{6}$$

$$L = m \cdot \sqrt{G \cdot m_0 \cdot r} \tag{7}$$

Durch Eliminieren von $r$ werden beide Gleichungen zusammengefasst:

$$r = \frac{L^2}{m^2 \cdot G \cdot m_0} \tag{8}$$

$$E = -\frac{G^2 \cdot m_0^2 \cdot m^3}{2L^2} \tag{9}$$

b) Die Umlaufdauer $T$ auf der Kreisbahn ergibt sich aus der Umlaufgeschwindigkeit $v$ und dem Kreisumfang $2\pi r$:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{10}$$

Ersetzt man in dieser Beziehung $v$ durch den in a) hergeleiteten Zusammenhang mit $r$, so entsteht

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot m_0}{r}}} \tag{11}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_0} \cdot r^3 \tag{12}$$

Die gefundene Gleichung entspricht dem 3. Keplerschen Gesetz im Sonderfall einer Kreisbahn.

**Aufgabe 3:** *Analogien Translation & Rotation* (★)

Ergänzen Sie nachstehende Tabelle, indem Sie die äquivalenten Gesetze und Größen bei Translation und Rotation einander zuordnen. Geben Sie stets Name und Definition der entsprechenden physikalischen Größe an.

| **Translation** | | **Rotation** | |
|---|---|---|---|
| Größe | Symbol=Definition | Größe | Symbol=Definition |
| | | Winkelgeschwindigkeit | $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ |
| Masse | $m = \int_V \rho dV$ | | |
| Impuls | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ | | |
| Kinetische Energie | $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ | | |
| Kraft | $\vec{F}$ | | |
| $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ | | | |

**Lösung:**

| **Translation** | | **Rotation** | |
|---|---|---|---|
| Größe | Symbol=Definition | Größe | Symbol=Definition |
| Geschwindigkeit | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | Winkelgeschwindigkeit | $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ |
| Masse | $m = \int_V \rho dV$ | Trägheitsmoment | $I = \int r^2 dm$ |
| Impuls | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ | Drehimpuls | $L = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ |
| Kinetische Energie | $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ | Rotationsenergie | $E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$ |
| Kraft | $\vec{F}$ | Drehmoment | $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$ |
| $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ | | $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ | |

**Aufgabe 4:** *Auf dem Spielplatz* (★)

Sie haben auf dem Spielplatz in der Nähe einen Drehteller zum Spielen gefunden. Sie stellen sich auf den Teller und drehen ihn so an, dass er sich mit Ihnen darauf mit einer konstanten Frequenz von f= 1/s (also einer Winkelfrequenz von $2\pi$/s) dreht. Für die folgenden Rechnungen wird angenommen, dass sie 70 kg wiegen und ein vernachlässigbares Trägheitsmoment haben. Das Trägheitmoment des Tellers wird vernachlässigt.

a) Nach dem Andrehen ist ihr Schwerpunkt 0,5m von der Drehachse des Tellers entfernt. Was ist das Trägheitmoment dieser Anordnung?

b) Wie verändert sich die Drehfrequenz wenn Sie die Entfernung zur Drehachse auf 0,2m verringern?

c) Welche Arbeit haben Sie dabei verrichtet?

**Lösung:**

a) Da die Eigenträgheitsmomente vernachlässigt wurden trägt nur der Steiner-Anteil bei

$$I = mr^2 = 70kg \cdot 0,5^2m^2 = 17,5kgm^2 \tag{13}$$

b) Es gilt die Drehimpulserhaltung.

$$L = mr^2\omega = I\omega = mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2 \tag{14}$$

Daraus folgt:

$$\omega_2 = \frac{r_1^2\omega_1}{r_2^2} = \frac{0,5^2m^2 \cdot 2\pi}{0,2^2m^2 \cdot 1s} = 6,25\frac{2\pi}{s} \tag{15}$$

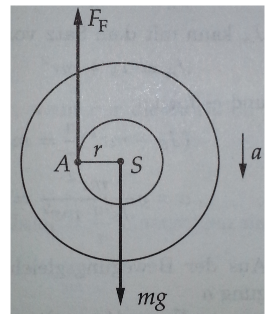
c) Es gilt:

$$E_{rot} = \frac{L \cdot \omega}{2} = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \tag{16}$$

$$W = E_{nach} - E_{vor} = \frac{1}{2} m(r_2^2 \omega_2^2 - r_1^2 \omega_1^2) = 1,8kJ \tag{17}$$

**Aufgabe 5:** *JoJo - Verknüpfung von Translation und Rotation* (★★★)

Ein JoJo besteht aus einer Rolle mit der Masse $m = 135\,\mathrm{g}$ und dem Trägheitsmoment $J_S = 140\,\mathrm{g\,cm^2}$, auf die ein Fader der Länge $l = 83\,\mathrm{cm}$ aufgewickelt ist. Der Radius der Trommel ist $r = 12{,}5\,\mathrm{mm}$.




a) Mit welcher Beschleunigung $a$ bewegt sich die Rolle nach dem Loslassen nach unten?

b) Wie groß ist die Fadenkraft $F_F$?

c) Welche Sinkgeschwindigkeit $v_1$ hat die Rolle, wenn der Faden vollständig abgewickelt ist?

**Lösung:**

a) Die Translationsbeschleunigung $a$ der Rolle erhält man aus der Bewegungsgleichung $F = ma$. $F$ ist die Summe aller am Körper angreifenden Kräfte (unabhängig von deren Angriffspunkten). Das sind hier die Gewichtskraft $mg$ der Rolle und die (vorläufig unbekannte) Fadenkraft $F_F$:

$$m \cdot a = m \cdot g - F_F \tag{18}$$

Gleichzeitig mit der Translation führt die Rolle eine Rotation aus. Da sich von der Rolle in der Zeit $t$ die Länge $s$ des Fadens abwickelt, um die der Schwerpunkt sinkt, gilt $s = r \cdot \varphi$ (Abrollbedingung). Daraus folgt

$$\ddot{s} = r \cdot \ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad a = r \cdot \alpha \tag{19}$$

Die Bewegungsgleichung der Rotation

$$J_A \cdot \alpha = M_A \tag{20}$$

kann für eine beliebige Lage der Achse aufgestellt werden.

**Schwerpunktachse S:**

$$J_S \cdot \alpha = M_S \tag{21}$$

Zu $M_S$ liefert nur $F_F$ einen Beitrag:

$$M_S = F_F \cdot r \tag{22}$$

Somit ergibt sich mit $\alpha = \frac{a}{r}$:

$$J_S \cdot \alpha = F_F \cdot r \quad \Rightarrow \quad F_F = \frac{J_S \cdot a}{r^2} \tag{23}$$

$F_F$ wird in die Bewegungsgleichung der Translation eingesetzt

$$m \cdot a = m \cdot g - \frac{J_S \cdot a}{r^2} \tag{24}$$

und es folgt

$$a \cdot \left(m + \frac{J_S}{r^2}\right) = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{1 + \frac{J_S}{mr^2}} = 5{,}90\,\mathrm{m/s^2} \tag{25}$$

**Momentane Drehachse A:**

$$J_A \cdot \alpha = M_A \tag{26}$$

Dieser Ansatz liefert das gleiche Ergebnis wie oben, ohne dass die Bewegungsgleichung der Translation benutzt werden muss , da in $M_A$ nur die bekannte Gewichtskraft der Rolle eingeht:

$$J_A \cdot \alpha = m \cdot g \cdot r \tag{27}$$

$J_A$ kann mit dem *Satz von Steiner* durch $J_S$ ersetzt werden

$$J_A = J_S + m \cdot r^2 \tag{28}$$

und es folgt dasselbe Ergebnis:

$$(J_S + m \cdot r^2) \cdot \frac{a}{r} = m \cdot g \cdot r \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \frac{m \cdot r^2}{J_S + m \cdot r^2} = \frac{g}{1 + \frac{J_S}{mr^2}} = 5{,}90\,\mathrm{m/s^2} \tag{29}$$

b) Aus der Bewegungsgleichung der Translation folgt bei nunmehr bekannter Beschleunigung $a$:

$$F_F = m \cdot (g - a) = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{J_S}{mr^2}}\right) = \frac{m \cdot g}{1 + \frac{mr^2}{J_S}} = 0{,}528\,\mathrm{N} \tag{30}$$

c) Wegen der konstanten Beschleunigung $a$ werden der zurückgelegte Weg $s$ und die Geschwindigkeit $v$ der Rolle mit Hilfe der Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ermittelt:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \tag{31}$$

$$v = a \cdot t + v_0 \tag{32}$$

Unter Berücksichtigung von $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$ gilt zur Zeit $t_1$, zu der das Band vollständig abgewickelt ist ($s = l$)

$$l = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \tag{33}$$

$$v_1 = a \cdot t_1 \tag{34}$$

$t_1$ wird eliminiert:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} \;; \qquad v_1 = \sqrt{2al} \tag{35}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl}{1 + \frac{J_S}{mr^2}}} = 3{,}13\,\mathrm{m/s} \tag{36}$$

**Alternativer Lösungsweg:**

Die Geschwindigkeit $v_1$ kann auch mit Hilfe des **Energieerhaltungssatzes** berechnet werden. Im Startpunkt ist nur die potentielle Energie $E_{pot} = mgl$ vorhanden, die nach Abwickeln des Bandes vollständig in kinetische Energie umgesetzt wird - $E_{kin} = E_{pot}$.

Je nach der gewählten Beschreibung der Bewegung setzt sich die Energie unterschiedlich zusammen: Translation und zusätzliche Rotation um die Schwerpunktachse $S$ ergibt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_S \cdot \omega_1^2 \tag{37}$$

und mit der Abrollbedingung $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \cdot \left(1 + \frac{J_S}{mr^2}\right) \tag{38}$$

(*Anmerkung:* Das gleiche Ergebnis für die kinetische Energie erhalten wir, wenn nur die Rotation um die momentane Drehachse A betrachtet wird. Dann ist $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot J_A \cdot \omega_1^2$ wobei nach dem *Satz von Steiner* $J_A = J_S + mr^2$ und ebenfalls die Abrollbedingung $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$ einzusetzen ist.)

Der Energiesatz lautet somit:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \cdot \left(1 + \frac{J_S}{mr^2}\right) = m \cdot g \cdot l \tag{39}$$

Für die Geschwindigkeit erhalten wir daraus ebenso

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl}{1 + \frac{J_S}{mr^2}}} = 3{,}13\,\mathrm{m/s} \tag{40}$$

## Aufgabe 6: *Kugelrennen & Rotation* (★)

Sie haben zum Experimentieren zwei Kugeln, die den gleichen Radius $R$ haben und die gleiche Masse $M$. Leider haben Sie vergessen, welche die Hohlkugel und welche die Vollkugel ist. Um dies herauszufinden, lassen Sie beide Kugeln eine schiefe Ebene herunterrollen. Welche Kugel kommt zuerst unten an? Begründen Sie Ihre Antwort nachvollziehbar, gegebenenfalls durch eine Rechnung.

**Lösung:**

Wir betrachten die **Energieerhaltung** ganz allgemein:

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot} \tag{41}$$

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \qquad \text{mit} \qquad \omega = \frac{v}{R} \qquad \text{folgt} \tag{42}$$

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(M + \frac{I}{R^2}\right) \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot h}{M + \frac{I}{R^2}}} \tag{43}$$

Wir erkennen $v \propto \sqrt{\frac{1}{I}}$, also ist die Geschwindigkeit größer wenn das Trägheitsmoment kleiner ist. Folglich muss die Kugel mit dem kleineren Trägheitsmoment schneller unten ankommen. Da bei der Hohlkugel die Masse insgesamt weiter außen sitzt, d.h. weiter von der Drehachse entfernt ist, ist ihr Trägheitsmoment größer als das der Vollkugel. Also kommt die Vollkugel vor der Hohlkugel unten an und wir wissen wieder welche Kugel welche ist ☺.

(Man muss die genauen Formeln für die Trägheitsmomente der Vollkugel $I_V = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ und Hohlkugel $I_H = \frac{2}{5} \cdot m \cdot \frac{R_a^5 - R_i^5}{R_a^3 - R_i^3} > I_V$ dafür gar nicht kennen)

**Aufgabe 7:** *Das Stahlseil* (★★)

An einem Stahlseil mit dem Durchmesser 2mm und 10m Länge, das an der Decke einer Halle aufgehängt ist, ist ein Haken der Masse 5kg befestigt. Es gibt eine Last der Masse 500kg, die man an den Haken hängen kann. Im Folgenden wird das Eigengewicht des Seils vernachlässigt. Das Elastisitätsmodul von Stahl ist $E = 210GPa$. Die Poissonzahl von Stahl ist $\mu = 0,3$

a) Sie hängen die Last an den Haken. Wie weit sinkt der Haken ab?

b) Um welchen Wert verändert sich der Durchmesser des Seils, wenn die Last daran gehängt wird?

c) Durch einen Fehler in der Handhabung fällt plötzlich ein Teil (50kg) von der Last ab. Was passiert mit dem Haken? Nach dem Prinzip welcher Aufgabe könnte man jetzt rechnen?

d) Wie hoch fliegt der Haken, wenn die ganze Last herunterfällt? Der Nullpunkt wird da gewählt, wo der Haken mit der Last hängt!

**Lösung:**

a) Das Elastizitätsgesetz lautet:

$$F = A \cdot E \frac{\Delta L}{L} \tag{44}$$

Nach der Längendifferenz umgestellt ergibt das:

$$\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = \frac{9,8 \cdot 500 \cdot 10}{0,001^2 \pi \cdot 210 \cdot 10^9} m = 7,4cm \tag{45}$$

b) Die Definition der Poissonzahl lautet:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} \tag{46}$$

Daraus ergibt sich:

$$\Delta d = -\frac{\mu d \Delta L}{L} = -4,4\mu m \tag{47}$$

c) Der Haken führt nun eine harmonische Schwingung aus. Man kann also nach dem Prinzip der Federpendel-Aufgabe weiterrechen.

d) Es gilt Energieerhaltung (Federkonstante $k = \frac{A \cdot E}{L}$):

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta L^2 = \frac{A \cdot E \cdot \Delta L^2}{2 \cdot L} = E_{vor} = E_{nach} = mgh \tag{48}$$

Also:

$$h = \frac{A \cdot E \cdot \Delta L^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot L} = 3,7m \tag{49}$$