Fakultät für Physik
Technische Universität München
Bernd Kohler & Daniel Singh

Blatt 2 - Lösung
WS 2014/2015
24.03.2015

Ferienkurs Experimentalphysik 1

(★) - leicht
(★★) - mittel
(★★★) - schwer

Aufgabe 1: *Verständnisfragen*

a) Unter welchen Bedingungen geht $W = \int \vec{F} d\vec{r}$ in $W = F \cdot s$ über?

b) Unter welchen Voraussetzungen gilt der Energieerhaltungssatz der Mechanik?

c) Weißen Sie nach, dass für eine Zentralkraft $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ gilt.

d) Bei einer Zentralbewegung habe der Geschwindigkeitsvektor die Richtung a) des Ortsvektors und b) senkrecht zum Ortsvektor. Wie berechnet sich in beiden Fällen der Betrag L des Drehimpulsvektors?

e) In welcher Weise darf die Lage des Angriffspunktes einer Kraft am starren Körper verändert werden, ohne dass sich dabei das Drehmoment ändert?

f) Welche Bedingungen müssen zwei verschiedene Drehachsen eines Körpers erfüllen, damit für die zugehörigen Trägheitsmomente der Satz von Steiner angewendet werden kann?

g) Was muss ein Eiskunstläufer tun, damit er bei einer Pirouette seine Winkelgeschwindigkeit erhöht? Wie ist die Zunahme der Winkelgeschwindigkeit zu erklären? Muss der Eiskunstläufer bei diesem Vorgang mechanische Arbeit verrichten? (Die Reibung zwischen dem Eis und den Schlittschuhen wird außer Betracht gelassen.)

h) Warum hebt bei hoher Startbeschleunigung das Vorderrad eines Motorrades von der Fahrbahn ab?

i) Was gehört zu einem schwingungsfähigen mechanischen System?

j) Wann ist die Schwingung harmonisch? Was bedeutet das für die Lösung der zugehörigen DGL?

k) Was ist das mathematische Pendel?

l) Was ist die Gesamtenergie beim Federpendel?

m) Weshalb treten in der Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung zwei Integrationskonstanten auf? Welche physikalische Bedeutung haben diese Konstanten?

n) Wie kann man durch Beobachten der Ort-Zeit-Funktion einer gedämpften Schwingung die Abklingkonstante δ bestimmen?

o) Welche Formen der gedämpften Schwingung ergeben sich für die Fälle: a) $\delta < \omega_0$; b) $\delta = \omega_0$; c) $\delta > \omega_0$?

p) Weisen Sie nach, dass bei äußerer Erregung für sehr kleine Frequenzen und beliebige Dämpfungen die Resonatoramplitude mit der Erregeramplitude übereinstimmt. Wie lässt sich dies anschaulich erklären?

Lösung:

a) $W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F \cos\alpha \; ds$ geht in $W = F \cdot s$ über, wenn $F = const.$ und $\vec{F} \parallel d\vec{r}$, d.h. $\alpha = 0$.

b) Der Energieerhaltungssatz der mechanischen Energie gilt, wenn keine Energieumwandlung in nicht-mechanische Energien (z. B. Wärmeenergie) erfolgt. Das ist der Fall, wenn nur Potentialkräfte auftreten. Potentialkräfte sind daran zu erkennen, dass eine gegen sie geleistete Verschiebungsarbeit bei der Umkehrung der Bewegung vollständig zurückgewonnen werden kann. Potentialkräfte hängen nur vom Ort ab. Zeit- und geschwindigkeitsabhängige Kräfte (z. B. Reibungskräfte) dagegen sind keine Potentialkräfte.

c) In der Formel für $\vec{L}$ wird $\vec{v}$ als die Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}$ nach der Zeit dargestellt: $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$.

Beim Differenzieren von $\vec{L}$ nach t wird die Produktregel angewendet:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \tag{1}$$

Da das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet, fällt der erste Term der Ableitung weg. Im zweiten Term kann $m\ddot{\vec{r}}$ durch $\vec{F}$ ersetzt werden:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2}$$

Wenn $\vec{F}$ eine Zentralkraft ist, hat sie die Richtung des Ortsvektors und auch das Vektorprodukt $\vec{r} \times \vec{F}$ muss verschwinden.

d) Mit $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ folgt: a) $\vec{v} \parallel \vec{r}$ bedeutet $\alpha = 0°$, d. h. $L = 0$; b) $\vec{v} \perp \vec{r}$ bedeutet $\alpha = 90°$, d. h. $L = mvr$

e) Der Angriffspunkt darf längs der Wirkungslinie der Kraft verschoben werden. (Der Kraftvektor ist ein linienflüchtiger Vektor.)

f) Die Achsen müssen parallel zueinander liegen. Eine der beiden Achsen muss durch den Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) gehen.

g) Der Eiskunstläufer bringt seine Arme und Beine möglichst nahe an seine Drehachse heran. Er leitet zunächst durch Kurvenfahrt die Pirouette mit einer geringen Winkelgeschwindigkeit ω_1 ein, wobei Arme und Beine vom Körper (von der Drehachse) möglichst weit weggestreckt werden, um ein großes Trägheitsmoment J_1 zu erreichen. Der Drehimpuls $L_1 = J_1\omega_1$ bleibt nun erhalten, auch wenn Arme und Beine so nahe wie möglich an die Drehachse herangebracht werden. Es wird dabei das Trägheitsmoment auf $J_2 < J_1$ verkleinert, die Winkelgeschwindigkeit nimmt dafür zu ($\omega_2 > \omega_1$), denn es gilt die **Drehimpulserhaltung** $L_2 = L_1$. Beim Heranziehen der Beine und Arme muss eine Arbeit (Muskelkraft längs eines Weges in radialer Richtung) verrichtet werden.

h) Im System des beschleunigten Motorrades wirken zwei Kräfte, die beide am Massenmittelpunkt angreifen: Trägheitskraft (ma) entgegen der Richtung der Beschleunigung und die Gewichtskraft (mg). Sie erzeugen entgegengesetzte gerichtete Drehmomente um den Auflagepunkt des Hinterrades. Wenn das Drehmoment der Trägheitskraft größer ist als das der Gewichtskraft, hebt das Vorderrad ab.

i) Zu einem schwingungsfähigen mechanischen System gehört ein Körper (träge Masse), auf den eine rücktreibende Kraft wirkt. Auf einen „Drehkörper“ (Trägheitsmoment) muss ein rücktreibendes Drehmoment wirken.

j) Wenn die rücktreibende Kraft linear von der Auslenkung abhängt. Es bedeutet, dass die Lösung durch Kombination von Sinus und Kosinus dargestellt werden kann.

k) Beim mathematischen Pendel wird ein Fadenpendel mit folgenden Annahmen beschrieben:
1. Die Pendelmasse ist eine Punktmasse.
2. Der Faden ist masselos.
Zur einfacheren Berechnung geht man meißt zusätzlich von kleinen Auslenkungen aus (Kleinwinkelnäherung)

l) Die Gesamtenergie E ist:

$$E = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{3}$$

m) Die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung ist die Lösung der Differentialgleichung, die aus der Bewegungsgleichung hervorgegangen ist. Die Differentialgleichung enthält die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit (Beschleunigung). Um die Ort-Zeit-Funktion zu ermitteln, ist eine zweimalige Integration über die Zeit erforderlich. Bei einer Integration tritt eine Konstante auf. Das sind die Amplitude x_m und der Nullphasenwinkel α. Die Amplitude ist der Betrag der maximalen Auslenkung aus der Ruhelage. Der Nullphasenwinkel (Anfangsphase) gibt das Vor- oder Nacheilen der Schwingung gegenüber der Funktion $x = X_m \cdot \cos(\omega_0 t)$ an.

n) Man misst dass Amplitudenverhältnis zweier aufeinanderfolgenden Schwingungen $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ und die Zeitdauer T zwischen dem Auftreten der Amplituden auf ein und derselben Seite der Auslenkung. Es gilt:

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{-\delta T} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = -\frac{1}{T} \cdot \ln \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{1}{T} \cdot \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} \tag{5}$$

In der Regel erhält man eine größere Genauigkeit, wenn man zwischen den Ablesungen eine größere Anzahl von Schwingungen (n) abwartet. Dann gilt:

$$\frac{x_{i+n}}{x_i} = e^{-n\delta T} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = -\frac{1}{n \cdot T} \cdot \ln \frac{x_{i+n}}{x_i} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \ln \frac{x_i}{x_{i+n}} \tag{7}$$

o) Im Fall a) ergibt sich eine periodische Lösung - der **Schwingfall** - mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Je größer δ ist, desto kleiner ist ω.

   Im Fall b) ($\omega = 0$) tritt keine periodische Bewegung mehr auf. Die bekannte Ort-Zeit-Funktion der schwach gedämpften Schwingung kann auf diesen Fall, den **aperiodischen Grenzfall**, nicht mehr angewendet werden.

   Bei noch stärkerer Dämpfung (Fall c) verlangsamt sich die Rückkehr in die Ruhelage, weshalb man von einem **Kriechfall** spricht.

p) Setzt man in die Formel für die Amplitude bei der erzwungenen Schwingung (ω ist dabei die Kreisfrequenz des Erregers, F_m die maximale Amplitude seiner Kraft und δ die Abklingkonstante)

$$x_m = \frac{\frac{F_m}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\omega\delta\right)^2}} \tag{8}$$

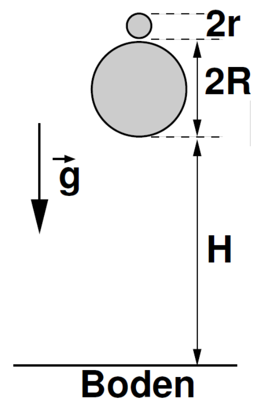
   die Erregerfrequenz $\omega = 0$ und für $\frac{F_m}{m} = \omega_0^2 \cdot \xi_m$ ein, so erhält man:

$$x_m = \frac{\frac{F_m}{m}}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 \cdot \xi_m}{\omega_0^2} = \xi_m \tag{9}$$

   Anschauliche Erklärung: Mit verschwindender Erregerfrequenz verschwinden auch Beschleunigung der Punktmasse, Federkraft und Federdehnung. Also verhält sich die Feder im Prinzip wie eine starre Stange.

Aufgabe 2: *Kleiner Ball auf großem Ball* (★★)

In einer Höhe von $H = 2\,\mathrm{m}$ liegt ein kleiner Ball mit der Masse m und dem Radius $r = 5\,\mathrm{cm}$ auf einem großen Ball mit der Masse $M = 50 \cdot m$ und dem Radius $R = 4 \cdot r$. Die Mittelpunkte der Bälle befinden sich vertikal übereinander. Nun werden beide Bälle gleichzeitig fallen gelassen, sodass die Relativgeschwindigkeit der Bälle zueinander zunächst null ist, d.h. der kleine Ball bleibt auf dem großen Ball (vgl. Skizze) - der Zwischenraum ist vernachlässigbar klein. Beim Aufkommen auf dem Boden führt der große Ball zunächst einen elastischen Stoß mit dem Boden durch und unmittelbar danach einen ebenfalls elastischen Stoß mit dem kleinen Ball. Wie hoch springt der kleine Ball anschließend? (Gesucht ist der Abstand vom Boden zu seinem Mittelpunkt bei der maximalen Höhe.)
Hinweis: Vernachlässigen Sie Reibungseffekte bei den Rechnungen.



Lösung:
Es ist nur die Bewegung entlang einer vertikalen Achse zu betrachten. Wir wählen die positive Richtung nach oben. Bevor der große Ball auf dem Boden aufprallt, haben beide Bälle eine Geschwindigkeit von

$$v_1 = v_2 = v = -\sqrt{2gH} \tag{10}$$

Beim ersten Stoß kann der Boden als ein Gegenstand mit „unendlicher Masse“ angesehen werden. Der Stoß ist (wie vorgegeben) elastisch. Aus der **Impulserhaltung** erhalten wir „Reflexion“ und damit die Geschwindigkeit des großen Balles nach dem 1. Stoß:

$$v_1' = -v = \sqrt{2gH} \tag{11}$$

Wir betrachten nun den elastischen Stoß zwischen dem großen und dem kleinen Ball mit den Geschwindigkeiten v_1' und v_2. Wir wollen nun die Geschwindigkeit u_2 des kleinen Balles nach dem Stoß ermitteln.

Es gilt die **Energieerhaltung**

$$E_{vor} = E_{nach} \tag{12}$$
$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_2^2 \tag{13}$$
$$M \cdot v_1'^2 + m \cdot v_2^2 = M \cdot u_1^2 + m \cdot u_2^2 \tag{14}$$
$$\Leftrightarrow M \cdot \left(v_1'^2 - u_1^2\right) = m \cdot \left(u_2^2 - v_2^2\right) \tag{15}$$
$$M \cdot (v_1' - u_1) \cdot (v_1' + u_1) = m \cdot (u_2 - v_2) \cdot (u_2 + v_2) \tag{16}$$

und die **Impulserhaltung**:

$$p_{vor} = p_{nach} \tag{17}$$
$$M \cdot v_1' + m \cdot v_2 = M \cdot u_1 + m \cdot u_2 \tag{18}$$
$$\Leftrightarrow M \cdot (v_1' - u_1) = m \cdot (u_2 - v_2) \tag{19}$$

Teilt man nun Gleichung 16 durch Gleichung 19, so erhält man:

$$v_1' + u_1 = u_2 + v_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = u_2 + v_2 - v_1' \tag{20}$$

Dies können wir nun wiederum in Gleichung 19 einsetzen und erhalten:

$$m \cdot v_2 + M \cdot (2v_1' - v_2) = u_2 \cdot (m + M) \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = \frac{m \cdot v_2 + M \cdot (2v_1' - v_2)}{m + M}{}^{1} \tag{21}$$

Wir setzen nun v_1' und v_2 ein und erhalten damit:

$$u_2 = \frac{-m + 3M}{m + M} \cdot \sqrt{2gH} \tag{22}$$
$$= \frac{-m + 150m}{m + 50m} \cdot \sqrt{2gH} \tag{23}$$
$$= \frac{149}{51} \cdot \sqrt{2gH} \tag{24}$$

[1] Diese Formel für den elastischen Stoß muss nicht hergeleitet werden.

Die Sprunghöhe des kleinen Balls nach dem Stoß ergibt sich nun aus der **Energieerhaltung**:

$$E_{kin} = E_{pot} \tag{25}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot u_2^2 = m \cdot g \cdot \Delta h \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h = \frac{u_2^2}{2g} = \left(\frac{149}{51}\right)^2 \cdot H = 17{,}07\,\mathrm{m} \tag{26}$$

Somit ist die Sprunghöhe des Mittelpunktes des kleinen Balles maximal $h = \Delta h + 2R + r = \Delta h + 9r = 17{,}52\,\mathrm{m}$.

Aufgabe 3: *Erdsatellit* (★★★)

Ein Erdsatellit hat im Abstand $r_1 = 10\,500\,\mathrm{km}$ vom Erdmittelpunkt die Geschwindigkeit $v_1 = 5{,}70\,\mathrm{km/s}$ und den Bahnwinkel $\alpha_1 = 90°$.

a) Um welchen Punkt der Bahn handelt es sich?

b) Wie groß sind die große Halbachse a seiner Bahnellipse und seine Umlaufdauer T?

Lösung:

a) Wegen $\alpha_1 = 90°$ handelt es sich entweder um das Perizentrum oder das Apozentrum der Satellitenbahn. Die Entscheidung kann getroffen werden, wenn man den Abstand r_2 des zweiten Bahnpunktes, für den $\alpha_2 = 90°$ gilt berechnet. Dazu dienen die **Energieerhaltung** sowie die **Drehimpulserhaltung**:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - G \cdot \frac{m \cdot m_E}{r_1} \\ L &= m \cdot v_2 \cdot r_2 = m \cdot v_1 \cdot r_1 \end{aligned} \tag{27}$$

v_2 wird eliminiert:

$$v_1^2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} - 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{r_2} = v_1^2 - 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{r_1} \tag{28}$$

Die Zusammenfassung von Energie- und Drehimpulserhaltungssatz ergibt eine gemischt quadratische Gleichung für $\frac{1}{r_2}$:

$$\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2} \cdot \left(\frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1^2} - 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^3} \tag{29}$$

Diese Gleichung löst man nun am einfachsten durch Hinzufügen der quadratischen Ergänzung:

$$\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2} \cdot \left(\frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2}\right)^2 = \tag{30}$$

$$\left(\frac{1}{r_1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2} \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2}\right)^2 \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{r_2} - \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2}\right)^2 \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{r_2} - \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2}\right) = \pm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2}\right) \tag{33}$$

Außer der Lösung $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1}$, die auf den Ausgangspunkt führt, hat die Gleichung die Lösung

$$\frac{1}{r_2} = \frac{2 \cdot G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1^2} - \frac{1}{r_1} \tag{34}$$

Sie liefert

$$r_2 = \frac{r_1}{\frac{2 \cdot G \cdot m_E}{v_1^2 \cdot r_1} - 1} = 7870\,\text{km} < r_1 \tag{35}$$

Folglich befindet sich der Erdsatellit im Punkt r_1 im Apozentrum (größte Entfernung) seiner Bewegung.

b) Für die große Halbachse der Satellitenbahn gilt

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = 9180\,\text{km} \tag{36}$$

Die Umlaufdauer ist durch das 3. Keplersche Gesetz mit der großen Halbachse der Ellipse verknüpft. Da die Satellitenmasse gegenüber der Erdmasse vernachlässigbar klein ist, gilt

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_E}{4\pi^2} \tag{37}$$

Daraus folgt

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot m_E}} = 8760\,\text{s} = 2\,\text{h}\ 26\,\text{min} \tag{38}$$

Aufgabe 4: *Leistung eines PKW* (★★)

Ein PKW der Masse $m = 1{,}3\,\text{t}$ fährt einmal auf waagrechter Strecke und einmal auf einer Steigung mit dem Winkel $\alpha = 4{,}0°$ gegen die Waagrechte aus dem Stand an. In beiden Fällen wirkt die gleiche Zugkraft, die über die Zeit $t_1 = 3{,}0\,\text{s}$ aufrechterhalten werden kann. Deshalb erfolgt das Anfahren auf der Waagerechten während dieser Zeit mit der konstanten Beschleunigung $a_W = 2{,}9\,\text{m/s}^2$. Berechnen Sie

a) die Arbeit W, die in der Zeit t_1 vom Motor auf der waagrechten Strecke verrichtet wird,

b) die Leistung P_W des Motors zur Zeit t_1 auf der waagrechten Strecke,

c) die Beschleunigung a_B, die bergauf erreicht wird,

d) die Leistung P_B des Motors zur Zeit t_1 auf der Bergstrecke.

Lösung:

a) In der Zeit t_1 legt das Fahrzeug die Strecke s_1 zurück und der Motor verrichtet die Arbeit:

$$W = \int_0^{s_1} F_s ds \quad \text{mit} \quad F_s = m \cdot a_W \tag{39}$$

Wegen $a_W = const.$ folgt

$$W = m \cdot a_W \cdot \int_0^{s_1} ds = m \cdot a_W \cdot s_1 \quad \text{und} \quad s_1 = \frac{1}{2} a_W t_1^2 \tag{40}$$

Man erhält für die Arbeit

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a_W^2 \cdot t_1^2 = 49\,\text{kW s} = 1{,}4 \times 10^{-2}\,\text{kW h} \tag{41}$$

b) Zur Zeit t_1 hat das Fahrzeug auf der waagrechten Strecke die Geschwindigkeit v_{W_1}. Die Leistung des Motors ist dann

$$P_W = F_s \cdot v_{W_1} \tag{42}$$

Mit $F_s = m \cdot a_W$ und $v_{W_1} = a_W \cdot t_1$ folgt

$$P_W = m \cdot a_W^2 \cdot t_1 = 33\,\text{kW} \quad (45\,\text{PS}) \tag{43}$$

c) Die Beschleunigung a_B für das Anfahren am Berg wird mit Hilfe der Bewegungsgleichung berechnet:

$$m \cdot a_B = F_s - F_H \tag{44}$$

Darin ist F_s die Zugkraft des Motors. Sie hat denselben Betrag wie auf der waagrechten Strecke:

$$F_s = m \cdot a_W \tag{45}$$

F_H ist der Betrag der Komponente der Gewichtskraft in Richtung des Hanges:

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha \tag{46}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m \cdot a_B = m \cdot a_W - m \cdot g \cdot \sin\alpha \tag{47}$$

und es folgt daraus

$$a_B = a_W - g \cdot \sin\alpha = 2{,}2\,\mathrm{m/s^2} \tag{48}$$

d) Auf der Bergstrecke ist die Leistung des Motors zur Zeit t_1

$$P_B = F_s \cdot v_{B_1} \tag{49}$$

Mit $F_s = m \cdot a_W$ und $v_{B_1} = a_B \cdot t_1$ wird

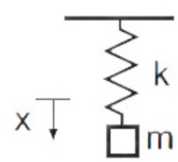
$$P_B = m \cdot a_W \cdot a_B \cdot t_1 \tag{50}$$

Verwendet man für a_B den Ausdruck aus der Lösung des Aufgabenteils c), so erhält man

$$P_B = m \cdot a_W \cdot (a_W - g \cdot \sin\alpha) \cdot t_1 = 25\,\mathrm{kW} \quad (34\,\mathrm{PS}) \tag{51}$$

Aufgabe 5: *Das Federpendel* (★★)

Es wird ein Federpendel betrachtet. Die Feder ist masselos. Unten wird als positive Richtung definiert.



a) Welche Kräfte wirken hier? Welche sind für das Prinzip des Federpendels notwendig?

b) Stellen Sie die DGL Federpendels mit Reibung auf!

c) Lösen Sie die DGL mit einem Exponentialansatz! (Hier ohne Reibung rechnen!)

d) Wie muss die Feder eines Sekundenpendels (T=2s) gewählt werden, wenn die Pendelmasse 50g beträgt?

Lösung:

a) Die hook'sche Federkraft und die Gravitation wirken hier. Die Federkraft ist die benötigte rücktreibende Kraft. Die Gravitation wird prinzipiell nicht benötigt und ist hier die Inhomogenität der DGL.

b) Der Kräfteansatz ist:
$$F = m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + mg \tag{52}$$
Daraus wird:
$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g \tag{53}$$
r ist hier die Reibungskonstante.

c) Es wird definiert: $\omega^2 = \frac{k}{m}$

So wird aus der Gleichung 53 bei Weglassen des Reibungsterms folgendes:
$$\ddot{x} + \omega^2 x = g$$
Der verwendete Ansatz ist:
$$x(t) = C \cdot e^{\lambda t} \tag{54}$$
Einsetzen in die homogene DGL ergibt:
$$C \cdot e^{\lambda t} \cdot \left(\lambda^2 + \omega^2\right) = 0 \tag{55}$$
Daraus folgt für λ :
$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega \tag{56}$$
Daraus folgt, dass die Lösung folgender Form sein muss:
$$x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{-i\omega t} \tag{57}$$
Man kann diese Lösung anschaulicher machen, indem man geschickt die Konstanten A und B wählt:
$A = C_1 + C_2$ und $B = i(C_2 - C_1)$

Umgekehrt gilt also $C_1 = \frac{A + iB}{2}$ und $C_2 = \frac{A - iB}{2}$

So wird die Lösung der DGL zu:

$$x(t) = A \cdot cos(\omega t) + B \cdot sin(\omega t) \tag{58}$$

Die Wahl für A und B folgt aus der Euler-Formel:

$$e^{ix} = cos(x) + isin(x) \tag{59}$$

Da die Inhomogenität konstant ist wird die partikuläre Lösung auch als konstant angesetzt.
Aus Einsetzen folgt: $\frac{k}{m}x_p = g$
Also: $x_p = \frac{gm}{k}$ Die gesamte Lösung ist also:

$$x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) + \frac{gm}{k} \tag{60}$$

Das Pendel schwingt also um den Gleichgewichtspunkt von Feder- und Gewichtskraft. A und B werden aus den vorgegebenen Anfangsbedingungen ermittelt.

d) Es gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{61}$$

Es folgt für k:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 0,49\frac{N}{m} \tag{62}$$

Aufgabe 6: *Abklingvorgang* (★★)

Bei einer gedämpften Schwingung wird das Maximum der Elongation am Ende der 10. Periode zu $x_{10} = 264\,\text{mm}$ und am Ende der 15. Periode zu $x_{15} = 220\,\text{mm}$ auf der gleichen Seite der Auslenkung ermittelt.

a) Wie groß ist das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maximalausschläge $\frac{x_i}{x_{i+1}}$?

b) Berechnen Sie das logarithmische Dekrement Λ.

Hinweis: Das logarithmische Dekrement Λ berechnet sich aus der Abklingkonstante δ und einem Zeitabstand T zwischen voneinander auftretenden Elongationen: $\Lambda = \delta \cdot T = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}}$. Es ist ein Maß für das Dämpfungsverhalten von frei schwingenden Systemen.

c) Am Ende welcher Periode n_h ist die maximale Elongation auf der Hälfte der maximalen Anfangselongation x_0 abgeklungen?

d) Wie groß ist die Abklingkonstante δ, wenn das Abklingen von x_{10} auf x_{15} in der Zeit $\Delta t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ erfolgt?

e) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung und vergleichen sie diese mit der Kreisfrequenz ω der gedämpften Schwingung. (Ist die Dämpfung schwach oder stark?)

Lösung:

a) Für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender maximaler Ausschläge auf der gleichen Seite gilt

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\delta T} \tag{63}$$

Gegeben sind aber x_{10} und x_{15} und damit ist das Verhältnis

$$\frac{x_{10}}{x_{15}} = e^{5\delta T} \tag{64}$$

bekannt. Potenziert man die erste Gleichung mit 5, so kann aus beiden durch Eliminieren von $e^{5\delta T}$ die Beziehung

$$\frac{x_{10}}{x_{15}} = \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^5 \tag{65}$$

gewonnen werden. Folglich ist

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \sqrt[5]{\frac{x_{10}}{x_{15}}} = 1,04 \tag{66}$$

b) Das logarithmische Dekrement ermitteln wir aus $\frac{x_{10}}{x_{15}} = e^{5\delta T}$, denn

$$5\delta T = \ln \frac{x_{10}}{x_{15}} \tag{67}$$

und damit

$$\Lambda = \delta T = \frac{1}{5} \cdot \ln \frac{x_{10}}{x_{15}} = 0,036 \tag{68}$$

c) Für das Abklingen der Schwingung auf den halben Wert der maximalen Anfangsauslenkung gilt

$$\frac{x_0}{\frac{x_0}{2}} = e^{n_h \Lambda} \tag{69}$$

Damit wird $n_h \Lambda = \ln 2$ und somit $n_h = \frac{\ln 2}{\Lambda} = 19,3$. Das heißt die Forderung der Aufgabe ist am besten für $n_h = 19$ erfüllt, aber nicht exakt erfüllbar.

d) Zunächst ist $T = \frac{\Delta t}{5} = 0{,}5\,\mathrm{s}$. Damit wird

$$\delta = \frac{\Lambda}{T} = 0{,}072\,1/\mathrm{s} \tag{70}$$

e) Es ist $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Daraus folgt

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2} \tag{71}$$

Da hier $\frac{2\pi}{T} >> \delta$ ist, ergibt sich

$$\omega_0 \approx \omega = \frac{2\pi}{T} = 12{,}6\,1/\mathrm{s} \tag{72}$$

Es handelt sich also um eine schwach gedämpfte Schwingung

Aufgabe 7: *Äußere Erregung* (★★★)

Bei einem schwingungsfähigen System seien m, k und r gegeben. Es wird von außen erregt, wobei ξ_m konstruktiv festgelegt ist.

a) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_R.

b) Berechnen Sie das Verhältnis Resonanzamplitude $x_m(\omega_R)$ zur Erregeramplitude ξ_m.

c) Welche Frequenzänderung erfährt der im Resonanzfall schwingende Resonator, wenn er nach Abschalten des Erregers freie Schwingungen ausführt?

Lösung:

a) Im Resonanzfall ($\omega = \omega_R$) liegt das Maximum der Kurve $s_m(\omega)$ vor. Es ergibt sich aus dem Minimum des Radiakanden in der Formel für $x_m = \frac{\frac{F_m}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\omega\delta)^2}}$:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right] = 2\cdot\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cdot(-1)\cdot 2\cdot\omega + 4\delta^2\cdot 2\omega = 0 \tag{73}$$

Division durch 4ω ergibt

$$-\omega_0^2+\omega^2+2\delta^2 = 0 \tag{74}$$

Daraus folgt

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} \tag{75}$$

Da m, k und r gegeben sind, werden die Beziehungen $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ und $\delta = \frac{r}{2m}$ verwendet. Es entsteht

$$\omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{2m^2}} \tag{76}$$

b) Für den Fall der äußeren Erregung gilt $\frac{F_m}{m} = \frac{k\cdot\xi_m}{m} = \omega_0^2\cdot\xi_m$. Daher ist

$$\frac{x_m(\omega_R)}{\xi_m} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+4\cdot\omega_R^2\cdot\delta^2}} \tag{77}$$

Unter Verwendung der Beziehung $\omega_R^2 = \omega_0^2-2\delta^2$ wird zunächst der Radikand vereinfacht, wobei sich der Ausdruck $4\cdot\omega_0^2\cdot\delta^2-4\delta^4$ ergibt. Dadurch entsteht

$$\frac{x_m(\omega_R)}{\xi_m} = \frac{1}{\frac{2\delta}{\omega_0}\cdot\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\frac{r}{m}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{1-\frac{r^2}{4km}}} \tag{78}$$

c) Die freie Schwingung des Systems hat die Frequenz

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2-\delta^2} \tag{79}$$

Sie ist größer als die Resonanzfrequenz $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$. Die gesuchte Frequenzänderung ist daher

$$\Delta\omega = \omega_f-\omega_R \tag{80}$$