Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Partielle Differentialgleichungen

Autor: Benjamin Rüth, Korbinian Singhammer
Stand: 12. März 2015

Aufgabe 1 (Klassifizierung) Man bestimme die Typen der pDGlen und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

1.1

$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_x + 4u_y = 2u$

1.2

$x^3u_{xx} + 2u_{xy} + y^3u_{yy} + u_x - yu_y = e^x$

1.3

$yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = y^2 + \ln(1 + x^2)$

Lösung: Zu einer pDGL 2. Ordnung gehört eine symmetrische Matrix A, die sich aus dem Hauptteil der pDGL ergibt.

(.1) Als Matrix A erhalten wir:

$$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_x + 4u_y = 2u \;\Leftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Wegen $\det A = 0$ ist die pDGL in ganz $\mathbb{R}^2$ vom parabolischem Typ.

(.2) Als Matrix A erhalten wir:

$$x^3u_{xx} + 2u_{xy} + y^3u_{yy} + u_x - yu_y = e^x \;\Leftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & y^3 \end{pmatrix} .$$

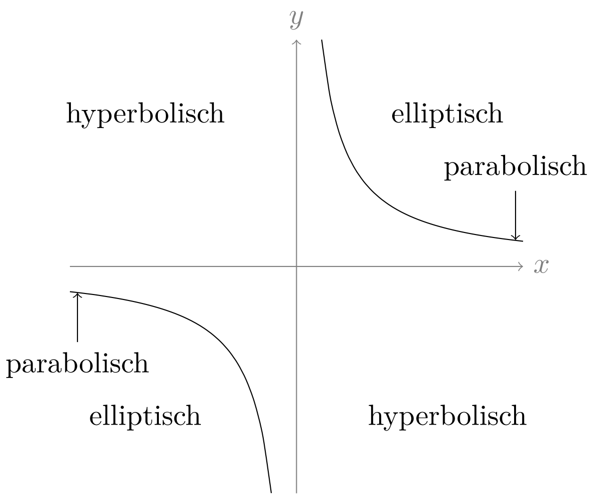
Nun gilt:

$$\det A = (xy)^3 - 1 \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch) für} & x > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{x},\ x < 0 \Rightarrow y < \frac{1}{x} \\ = 0 & \text{(parabolisch) für} & y = \frac{1}{x} \\ < 0 & \text{(hyperbolisch) für} & x > 0 \Rightarrow y < \frac{1}{x},\ x < 0 \Rightarrow y > \frac{1}{x} \\ & & x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

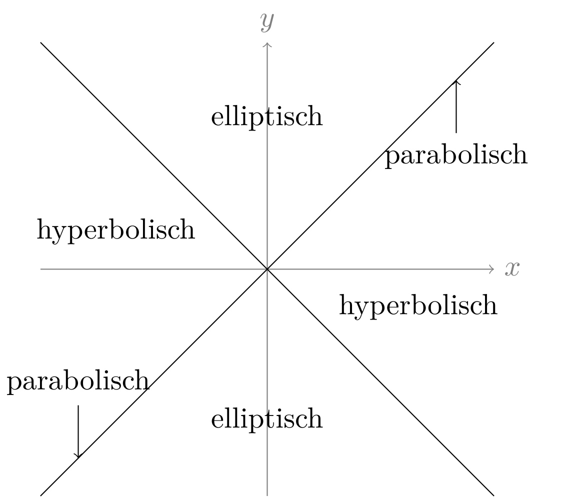
(.3) Als Matrix A erhalten wir:

$$yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = y^2 + \ln(1 + x^2) \;\Leftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} .$$

$$\det A = y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) \begin{cases} > 0 & \text{für} & (y < -x \wedge y < x) \vee (y > -x \wedge y > x) \\ = 0 & \text{für} & y = x \vee y = -x \\ < 0 & \text{für} & (y > -x \wedge y < x) \vee (y < -x \wedge y > x) \end{cases}$$



Gebiete unterschiedlichen Typs zu 1.2



Gebiete unterschiedlichen Typs zu 1.3

Aufgabe 2 (Separationsansatz) Finden Sie mit Hilfe des Separationsansatzes Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

2.1

$x^2\, u_x + \frac{1}{y}\, u_y = u$

2.2

$x^2\, u_{xy} + 3y^2\, u = 0$

Lösung: Gesucht werden jeweils Lösungen in der Form $u(x, y) = f(x)\, g(y)$.

(.1) Wir gehen mit den Ansatz $u(x, y) = f(x)\, g(y)$ in die PDE ein und erhalten

$$x^2\, f'(x)\, g(y) + \frac{1}{y}\, f(x)\, g'(y) = f(x)\, g(y)\,.$$

Nun schaffen wir alle Terme, die von x abhängen, nach links und alle anderen nach rechts

$$x^2\, \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{y}\, \frac{g'(y)}{g(y)}\,.$$

Damit erhalten wir die zwei gewöhnlichen DGLen

$$x^2\, \frac{f'(x)}{f(x)} = k \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{y}\frac{g'(y)}{g(y)} = k$$

für $k \in \mathbb{R}$. Wir lösen die zwei ODEs

$$f'(x) = \frac{k}{x^2}\, f(x) \quad \text{und} \quad g'(y) = (1-k)\, y\, g(y)$$

durch Trennung der Veränderlichen:

Für f erhalten wir:

$$\int \frac{1}{f}\, \mathrm{d}f = \int \frac{k}{x^2}\, \mathrm{d}x\,, \quad \text{also} \quad f(x) = ce^{-\frac{k}{x}} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Für g erhalten wir:

$$\int \frac{1}{g}\, \mathrm{d}g = \int (1-k)\, y\, \mathrm{d}y\,, \quad \text{also} \quad g(y) = de^{\frac{(1-k)}{2} y^2} \quad \text{mit} \quad d \in \mathbb{R}\,.$$

Damit erhalten wir die folgenden Lösungen

$$u(x, y) = f(x)\, g(y) = c\, \exp\Big(-\tfrac{k}{x} + \tfrac{(1-k)}{2}\, y^2\Big)$$

mit beliebigen Konstanten c, $k \in \mathbb{R}$.

(.2) Einsetzen des Ansatzes $u(x,y) = f(x)g(y)$ in die PDE liefert:

$$x^2\, f'(x)g'(y) + 3y^2\, f(x)g(y) = 0.$$

Das Sortieren der Terme nach x und y führt auf

$$x^2\, \frac{f'(x)}{f(x)} = -3y^2\, \frac{g(y)}{g'(y)}\,.$$

Damit erhalten wir die zwei gewöhnlichen DGLen

$$x^2\, \frac{f'(x)}{f(x)} = k \quad \text{und} \quad -\, 3y^2\, \frac{g(y)}{g'(y)} = k$$

für $k \in \mathbb{R}$, d. h.

$$f'(x) = \frac{k}{x^2}\, f(x) \quad \text{und} \quad g'(y) = -\frac{3y^2}{k}\, g(y).$$

Die Lösungen der beiden ODEs aus (1) erhalten wir per Trennung der Veränderlichen:

$$f(x) = ce^{-\frac{k}{x}} \quad \text{und} \quad g(y) = de^{-\frac{1}{k}\, y^3} \quad \text{mit} \quad c,\, d,\, k \in \mathbb{R},\, k \neq 0\,.$$

Damit finden wir als Lösungen der PDE

$$u(x,y) = c\, \exp\!\left(-\frac{y^3}{k} - \frac{k}{x}\right)$$

mit Konstanten c, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Aufgabe 3 (Separationsansatz) Wir betrachten die Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$ auf der Menge $D = [0,1] \times [0,1]$.

3.1 Finden Sie eine Lösung der Gleichung, die den Randwert $u(x,0) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0,1]$ und $u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0$ für $x, y \in [0,1]$ annimmt.

3.2 Finden Sie eine Lösung der Gleichung, die den Randwert $u(x,0) = \sin(2\pi x)$ für $x \in [0,1]$ und $u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0$ für $x, y \in [0,1]$ annimmt.

3.3 Prüfen Sie nach, dass die Gleichung das Superpositionsprinzip erfüllt: Sind u_1 und u_2 Lösungen der Gleichung und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $c_1 u_1 + c_2 u_2$ Lösung der Gleichung.

3.4 Verwenden Sie (.1-.3), um eine Lösung anzugeben, die den Randwert $u(x,0) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$ für $x \in [0,1]$ und $u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0$ für $x, y \in [0,1]$ annimmt.

3.5 Wir betrachten die Laplace-Gleichung $-\Delta u(x,y) = 0$ auf dem Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ mit den Randbedingungen

$$u(x,0) = x(1-x),\; u(x,1) = 0,\; u(0,y) = 0,\; u(1,y) = 0.$$

Geben Sie eine Darstellung der exakten Lösung $u(x,y)$ an.
Tipp: Separationsansatz, sin-Fourier-Reihenentwicklung, Superpositionsprinzip.

Lösung: (.1) Wir verwenden den Separationsansatz. $u(x, y) = f(x)g(y)$ einsetzen und separieren liefert: $\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}$. Daraus erhalten wir die beiden Gleichungen $\frac{f''(x)}{f(x)} = k$ und $\frac{g''(y)}{g(y)} = -k$ für beliebiges $k \in \mathbb{R}$.

Die beiden linearen ODEs 2. Ordnung können wir lösen:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x}, & \text{für } k > 0, \\ c_1 + c_2 x, & \text{für } k = 0, \\ c_1 \cos\sqrt{-k}x + c_2 \sin\sqrt{-k}x, & \text{für } k < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad g(y) = \begin{cases} d_1 \cos\sqrt{k}y + d_2 \sin\sqrt{k}y, & \text{für } k > 0, \\ d_1 + d_2 y, & \text{für } k = 0, \\ d_1 e^{\sqrt{-k}y} + d_2 e^{-\sqrt{-k}y}, & \text{für } k < 0. \end{cases}$$

Durch Multiplikation der zwei Funktionen, also $u(x, y) = f(x)g(y)$, erhalten wir für jede(!) Wahl von Konstanten $k, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung.

Die vorgegebenen Randwerte bestimmen die Konstanten:

- Aus $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ folgen $f(x) = \sin(\pi x)$ und $g(0) = 1$; insbesondere: $k < 0$, $\sqrt{-k} = \pi$, $c_1 = 0, c_2 = 1$.
- Aus $0 = u(x, 1) = f(x)g(1)$ folgt $g(1) = 0$ (sonst wäre $f \equiv 0$); also $d_1 + d_2 = 1$ und $d_1 e^{\pi} + d_2 e^{-\pi} = 0$, d.h. $d_1 = \frac{1}{1-e^{2\pi}}, d_2 = \frac{-e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}}$
- Aus $u(0, y) = u(1, y) = 0$ folgt $f(0) = f(1) = 0$ (sonst wäre $g \equiv 0$); das ist erfüllt.

Somit haben wir die (!) folgende Lösung des Randwertproblems gefunden:

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \left[\frac{1}{1 - e^{2\pi}} e^{\pi y} - \frac{e^{2\pi}}{1 - e^{2\pi}} e^{-\pi y} \right].$$

(.2) Wir gehen vor wie in (.1). Der Separationsansatz hängt nicht von der Randwerten ab, daher brauchen wir diesen Teil nicht zu wiederholen. Beim Einsetzen der Randwerte ergeben sich kleine Unterschiede.

- Aus $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ folgen $f(x) = \sin(2\pi x)$ und $g(0) = 1$; insbesondere: $k < 0$, $\sqrt{-k} = 2\pi$, $c_1 = 0, c_2 = 1$.
- Aus $0 = u(x, 1) = f(x)g(1)$ folgt $g(1) = 0$ (sonst wäre $f \equiv 0$); also $d_1 + d_2 = 1$ und $d_1 e^{2\pi} + d_2 e^{-2\pi} = 0$, d.h. $d_1 = \frac{1}{1-e^{4\pi}}, d_2 = \frac{-e^{4\pi}}{1-e^{4\pi}}$
- Aus $u(0, y) = u(1, y) = 0$ folgt $f(0) = f(1) = 0$ (sonst wäre $g \equiv 0$); das ist erfüllt.

Somit haben wir die (!) folgende Lösung des Randwertproblems gefunden:

$$u(x, y) = \sin(2\pi x) \left[\frac{1}{1 - e^{4\pi}} e^{2\pi y} - \frac{e^{4\pi}}{1 - e^{4\pi}} e^{-2\pi y} \right].$$

(.3) Das ist lediglich eine andere Sprechweise für die Tatsache, dass der Operator $-\Delta$ linear ist: Sind u_1, u_2 Lösungen, so gilt $-\Delta u_1 = 0$ und $-\Delta u_2 = 0$. Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\begin{aligned}-\Delta(c_1u_1+c_2u_2) &= -\partial_{xx}(c_1u_1+c_2u_2)-\partial_{yy}(c_1u_1+c_2u_2) = -c_1\partial_{xx}u_1-c_2\partial_{xx}u_2-c_1\partial_{yy}u_1-c_2\partial_{yy}u_2\\ &= -c_1\left(\partial_{xx}u_1+\partial_{yy}u_1\right)-c_2\left(\partial_{xx}u_2+\partial_{yy}u_2\right) = c_1(-\Delta u_1)+c_2(-\Delta u_2) = 0.\end{aligned}$$

(.4) Wir entwickeln $u(x,0) = \sin(\pi x)(1+2\cos(\pi x))$ in eine Fourier-Reihe: $\sin(\pi x)(1+2\cos(\pi x)) = \sin(\pi x)+\sin(2\pi x)$. Nun wenden wir (c) an: Sei u_a die Lösung aus (a) und u_b die Lösung aus (b), dann ist $c_au_a + c_bu_b$ eine Lösung der Laplace-Gleichung. Diese hat den Randwert $c_au_a(x,0)+c_bu_b(x,0) = c_a\sin(\pi x)+c_b\sin(2\pi x)$. Wählen wir also $c_a = c_b = 1$, so erhalten wir eine Lösung der Laplace-Gleichung mit dem richtigen Randwert! Also:

$$u(x,y) = \sin(\pi x)\left[\frac{1}{1-e^{2\pi}}e^{\pi y}-\frac{e^{2\pi}}{1-e^{2\pi}}e^{-\pi y}\right]+\sin(2\pi x)\left[\frac{1}{1-e^{4\pi}}e^{2\pi y}-\frac{e^{4\pi}}{1-e^{4\pi}}e^{-2\pi y}\right].$$

(.5) Idee:

- Entwickle $x(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\pi x)$ in eine Fourier-Reihe.
- Löse das RWP mit Randwert $u(x,0) = \sin(k\pi x)$ für $k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow u_k(x,y)$.
- Erhalte Lösung $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_ku_k(x,y)$.

Wir wollen $f(x) := x(1-x)$, $x \in [0,1]$, durch eine reine sin-Fourierreihe darstellen. (Formal könnten wir $f(x)$ zunächst durch $-f(-x)$ für $x \in [0,1]$ auf $[-1,0]$ fortsetzen und dann die 2-periodische Fortsetzung betrachten. Diese Funktion ist antisymmetrisch, also in eine reine sin-Fourierreihe entwickelbar.) Es gilt $x(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\pi x)$ mit

$$b_k = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & k \text{ gerade},\\ \frac{8}{\pi^3k^3}, & k \text{ ungerade}.\end{cases}$$

Man beachte, dass $\displaystyle\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(l\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{kl}$ gilt.

Wir lösen die Laplace-Gleichung mit den Randbedingungen

$$u(x,0) = \sin(k\pi x),\ u(x,1) = 0,\ u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0.$$

Das haben wir für $k = 1,2$ bereits in Z36.3 getan. In Verallgemeinerung der dortigen Lösung erhalten wir

$$u_k(x,y) = \sin(k\pi x)\left[\frac{1}{1-e^{2k\pi}}e^{k\pi y}-\frac{e^{2k\pi}}{1-e^{2k\pi}}e^{-k\pi y}\right] = \frac{1}{\sinh(k\pi)}\ \sin(k\pi x)\ \sinh(k\pi(1-y)).$$

Zusammensetzen der Lösungen $u_k(x,y)$ ergibt:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \left[\frac{1}{1-e^{2k\pi}} e^{k\pi y} - \frac{e^{2k\pi}}{1-e^{2k\pi}} e^{-k\pi y} \right] \\ &= \sum_{k\in 2\mathbb{N}+1} \frac{8}{\pi^3 k^3} \sin(k\pi x) \left[\frac{1}{1-e^{2k\pi}} e^{k\pi y} - \frac{e^{2k\pi}}{1-e^{2k\pi}} e^{-k\pi y} \right] \\ &= \sum_{k\in 2\mathbb{N}+1} \frac{8}{\pi^3 k^3 \sinh(k\pi)} \sin(k\pi x) \sinh(k\pi(1-y)). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Separationsansatz) Gesucht wird eine Lösung des Anfangs–Randwertproblems

$$\begin{aligned} & u_{xx}(x,t) - 4\,u_t(x,t) - 3\,u(x,t) = 0 && \text{für } x \in [0,\pi],\ t \in [0,\infty), && (1) \\ & u(x,0) = x\left(x^2 - \pi^2\right) && \text{für } x \in [0,\pi] \quad \text{(Anfangswerte)}, && (2) \\ & u(0,t) = u(\pi,t) = 0 && \text{für } t \in [0,\infty) \quad \text{(Randwerte)}. && (3) \end{aligned}$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Finden Sie mit dem Separationsansatz möglichst viele reelle Lösungen zu (1).

(b) Identifizieren Sie darunter diejenigen Lösungen $u_n(x,t)$, die die Randbedingung (3) erfüllen.

(c) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung $g(x) := x\,(x^2 - \pi^2)$ auf $[-\pi,\pi]$ in eine Fourier-Reihe.

(d) Machen Sie den Superpositionsansatz $u(x,t) = \sum u_n(x,t)$ mit den u_n aus (b) und finden Sie so eine Lösung zum Anfangsrandwertproblem (1)–(3).

Lösung:

(a) Ableiten des Separationsansatzes $u(x,t) = f(x)g(t)$ ergibt

$$f''(x)\,g(t) - 4\,f(x)\,g'(t) - 3\,f(x)\,g(t) = 0\,,$$

also

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = 4\,\frac{g'(t)}{g(t)} + 3\,.$$

Da das für alle (x,t) gilt, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$ sein; daraus erhalten wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = k \quad \text{und} \quad 4\,\frac{g'(t)}{g(t)} + 3 = k\,.$$

Lösungen der ersten Gleichung sind

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{\sqrt{k}\, x} + b\, e^{-\sqrt{k}\, x}, & a, b \in \mathbb{R}, k > 0, \\ ax + b, & a, b \in \mathbb{R}, \\ a\, \cos(\sqrt{-k}\, x) + b\, \sin(\sqrt{-k}\, x), & a, b \in \mathbb{R}, k < 0. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung kann umgeschrieben werden zu

$$g'(t) = \frac{k-3}{4}\, g(t); \quad \text{ihre Lösung ist} \quad g(t) = c\, e^{-\frac{3-k}{4}t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Mit dem Separationsansatz findet man (nach Zusammenfassen der Konstanten) also folgende reelle Lösungen

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-\frac{3-k}{4}t} \left(a\, e^{\sqrt{k}\, x} + b\, e^{-\sqrt{k}\, x} \right), & a, b \in \mathbb{R}, k > 0, \\ e^{-\frac{3t}{4}} (ax + b), & a, b \in \mathbb{R}, \\ e^{-\frac{3-k}{4}t} \left(a\, \cos(\sqrt{-k}\, x) + b\, \sin(\sqrt{-k}\, x) \right), & a, b \in \mathbb{R}, k < 0. \end{cases}$$

(b) Im Fall $k > 0$ folgt aus den Randbedingungen, dass

$$e^{-\frac{3-k}{4}t}(a + b) = 0 \quad \text{und} \quad e^{-\frac{3-k}{4}t} \left(a\, e^{\pi\sqrt{k}} + b\, e^{-\pi\sqrt{k}} \right) = 0\,.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a = -b$, also hat die zweite Gleichung als einzige Lösung $a = b = 0$. Für $k > 0$ ist demnach nur die triviale Lösung mit den Randbedingungen verträglich.

Im Fall $k = 0$ folgt aus $u(0,t) = 0$, dass $b = 0$, und damit aus $u(\pi, t) = 0$, dass $a = 0$. Also kommt auch hier nur die triviale Lösung in Frage.

Im Fall $k < 0$ folgt aus den Randbedingungen, dass

$$e^{-\frac{3-k}{4}t}(a \cdot 1 + b \cdot 0) = 0 \quad \text{und} \quad e^{-\frac{3-k}{4}t} \left(a \cos(\pi\sqrt{-k}) + b \sin(\pi\sqrt{-k}) \right) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a = 0$ und damit aus der zweiten Gleichung $b \sin(\pi\sqrt{-k}) = 0$. So erhalten wir $k = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$; der Parameter b bleibt beliebig. Mit beliebigen Konstanten $c_n \in \mathbb{R}$ ergibt sich also

$$u_n(x,t) = c_n\, e^{-\frac{3+n^2}{4}t}\, \sin(nx)\,. \tag{$**$}$$

(c) Die Fourier-Reihe zur Anfangsbedingung ist

$$g(x) = x(x^2 - \pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^3}\, (-1)^n \sin(nx).$$

(d) Da die Gleichung (1) linear und homogen ist, ist der Superpositionsansatz zulässig. Wir setzen also unter Verwendung von (∗∗) die Lösung an als

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-\frac{3+n^2}{4}t} \, \sin(nx)$$

und wollen geeignete Koeffizienten c_n bestimmen, damit die Anfangsbedingung (2) erfüllt wird. Dazu setzen wir (2) ein

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \sin(nx) \quad \stackrel{!}{=} \quad x(x^2 - \pi^2) \stackrel{(c)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^3} \, (-1)^n \sin(nx) \qquad (***)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $c_n = \frac{12}{n^3} \, (-1)^n$. Eine Lösung des Anfangsrandwertproblems (1)–(3) ist also

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^3} \, (-1)^n \, e^{-\frac{3+n^2}{4}t} \, \sin(nx).$$

Aufgabe 5 (Klassifizierung, Charakteristiken, Separationsansatz) Die folgende PDE ist gegeben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ , u = u(x,t) \ , \alpha \in \mathbb{R}$$

5.1 Von welchem Typ ist die PDE? Skizzieren Sie ggf. die Gebiete unterschiedlichen Typs in Abhängigkeit von α.

5.2 Berechnen Sie für $\alpha = 2$ mit Hilfe des Separationsansatzes diejenigen Lösungen, die die folgende Randbedingungen erfüllen:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(a,t) = 0, \qquad 0 < a < \infty$$

5.3 Führen Sie mit Ihrer gefundenen Lösung die Probe durch.

Lösung: (.1) Zuerst formen wir die PDE etwas um:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = 0$$

Der Hauptteil der PDE setzt sich nur aus den zweiten Ableitungen zusammen. Wir betrachten also nur den folgenden Ausschnitt der PDE:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Daraus ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \alpha$. Die PDE hat also für verschiedene α den folgenden Typ:

- für $\alpha < 0$ ist die PDE hyperbolisch,
- für $\alpha = 0$ ist die PDE parabolisch und
- für $\alpha > 0$ ist die PDE elliptisch.

(.2) Wir gehen mit dem folgenden Ansatz in die PDE ein:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Die notwendigen Ableitungen lauten

$$u_{xx} = X''T, \qquad u_{tt} = XT''.$$

Eingesetzt in die PDE erhalten wir

$$X''T + \alpha XT'' - XT = 0.$$

Wir wählen $\alpha = 2$, sortieren die PDE nach $X(x)$ und $T(t)$ und setzten die beiden Terme gleich einer Konstanten k:

$$\frac{X''}{X} = -2\frac{T''}{T} + 1 = k.$$

Wir erhalten also die beiden ODEs

$$X'' - kX = 0 \qquad \text{und} \qquad 2T'' + T(k-1) = 0.$$

Beide ODEs haben konstante Koeffizienten und lassen sich somit über das charakteristische Polynom lösen:

Die erste ODE hat das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - k = 0 \leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}$$

Die Lösung $X(t)$ lautet also

$$X(t) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_0 e^{-\sqrt{k}x} & \text{für } k \neq 0 \\ c_1 x + c_0 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Die zweite ODE hat das charakteristische Polynom

$$2\mu^2 + k - 1 = 0 \leftrightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1-k}{2}}$$

die Lösung $T(t)$ lautet also

$$T(t) = \begin{cases} d_1 e^{\sqrt{\frac{1-k}{2}}t} + d_0 e^{-\sqrt{\frac{1-k}{2}}t} & \text{für } k \neq 1 \\ d_1 x + d_0 & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

Aufgrund der Randbedingungen fordern wir $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ und $u(a,t) = X(a)T(t) = 0$. Das bedeutet, dass $X(0) = X(a) = 0$ gelten muss. Es folgt also, dass

$$k < 0,$$

da wir mit $k = 0$ die triviale Lösung erhalten würden und mit $k > 0$ die Exponentialfunktion nie den Wert Null erreichen kann, wenn $c \neq 0$ (wieder triviale Lösung). Wenn $k < 0$, dann wird der Ansatz für $X(x)$ komplexe Argumente in der Exponentialfunktion haben und somit sin–cos–Schwingungen enthalten. Für $X(x)$ ergibt nur eine Sinusschwingung mit Frequenz $ka\pi$ Sinn, da wir für 0 und a den Wert Randwert 0 fordern. Wir schreiben also lieber:

$$X(x) = c \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

um aus dieser Lösung k zu bestimmen verwenden wir die Darstellung des Sinus durch die Exponentialfunktion und fordern Gleichheit zu unserem Ansatz:

$$c \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{c}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi x}{a}} - e^{-i\frac{n\pi x}{a}}\right) \stackrel{!}{=} c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_0 e^{-\sqrt{k}x}$$

Es muss also gelten $c_1 = -c_2 = \frac{c}{2i}$ sowie $\frac{in\pi}{a} = \sqrt{k} \leftrightarrow k = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$. Daraus folgt für $T(t)$

$$T(t) = d_1 e^{t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}} + d_0 e^{-t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}}$$

Zusammengefasst erhalten wir also die Lösung

$$u(x,t) = T(t)X(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[A_n e^{t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}} + B_n e^{-t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}}\right].$$

wobei wir die Konstanten $d_1 c = A_n$ und $d_0 c = B_n$ zusammengefasst haben.

(.3) Abschließend führen wir mit unserer erhaltenen Lösung die Kontrolle durch. Die Randbedingungen sind erfüllt, da

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \text{ weil } \sin\left(\frac{n\pi 0}{a}\right) = \sin\left(\frac{n\pi a}{a}\right) = 0.$$

Um die Gültigkeit der PDE zu überprüfen, bestimmen wie erst die notwendigen Ableitungen:

$$u_{xx} = \sum_{n\in\mathbb{N}} -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[A_n e^{t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}} + B_n e^{-t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}}\right]$$

$$u_{tt} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[A_n e^{t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}} + B_n e^{-t\sqrt{\frac{a^2+n^2\pi^2}{2a^2}}}\right]$$

Setzten wir die Ableitungen in die PDE $u_{xx} + 2u_{tt} - u = 0$ ein, so stellen wir fest, dass sich $\alpha = 2$ genau mit der 2 im Nenner von u_{tt} wegkürzt. Den Ausdruck in den eckigen Klammern $[\dots]$ und die Sinusfunktion $\sin(\dots x)$ können wir einfach wegdividieren, da diese Funktionen jeweils in u, u_{xx} und u_{tt} enthalten sind. Übrig bleibt also

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n^2\pi^2 + a^2}{a^2}\right) - 1 = 0.$$

Somit löst die Lösung $u(x,t)$ das gegebene Randwertproblem.

Aufgabe 6 (Wärmeleitungsgleichung) Lösen Sie das Nullrandproblem mit

$$u_t = u_{xx} \text{ für } x \in (0,1),\ t \geq 0 \text{ und } u(0,x) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(2\pi x)\,.$$

Lösung: Wir gehen nach unserem Rezept (siehe Karpfinger) vor: Die Funktion $u(0,x)$ ist bereits als Fourierreihe gegeben. Wir erhalten die Lösung $u = u(t,x)$:

$$u(t,x) = 2e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x) + 3e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)\ .$$

Aufgabe 7 (Wärmeleitungsgleichung) Lösen Sie (allgemein) das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{mit} \quad u(0,x) = g(x) \quad \text{und} \quad u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$$

für einen Stab der Länge l, wobei an den Rändern kein *Wärmetransport* stattfindet, $u_x = 0$.

Lösung: Wir gehen vor wie bei der Lösung des Nullrandproblems:

1. Schritt. *Ermitteln von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:* Diese kennen wir bereits:

$$u = u(t,x) = e^{-c^2k^2t}\,(a\cos(k\,x) + \ b\sin(k\,x))\ , \quad a,\, b,\, k \in \mathbb{R}\,.$$

2. Schritt. *Die Randbedingungen legen Konstanten fest, wir erhalten eine allgemeine Lösung:* Wir ermitteln unter den Lösungen aus Schritt 1 jene, die auch die Randbedingungen $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$ erfüllen. Dabei gilt

$$u_x(t,x) = e^{-c^2k^2t}\,(-a\,k\sin(k\,x) + \ b\,k\cos(k\,x))\ .$$

- Aus $u_x(t,0) = 0$ für alle t folgt $b = 0$.
- Aus $b = 0$ und $u_x(t,l) = 0$ für alle t folgt $a\sin(k\,l) = 0$ für alle k. Damit:

$$\sin(k\,l) = 0 \ \Leftrightarrow\ k\,l = n\,\pi \ \text{ für } \ n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ k = \frac{n\,\pi}{l} \ \text{ für } \ n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u_n(t,x) = a_n e^{-c^2 (n\pi/l)^2 t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die auch die Randbedingung erfüllt.

Durch Superposition dieser Lösungen erhalten wir eine allgemeine Lösung, die die Wärmeleitungsgleichung und die Randbedingung erfüllt:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c^2 (n\pi/l)^2 t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right) .$$

3. Schritt: *Festnageln der Koeffizienten a_n der allgemeinen Lösung durch die Anfangsbedingungen:* Wir ermitteln nun mittels der allgemeinen Lösung aus Schritt 2 eine Lösung, die auch die Anfangsbedingung $u(0,x) = g(x)$ erfüllt. Dazu setzen wir die Anfangsbedingung ein:

Die Anfangsverteilung $u(0,x) = g(x)$ liefert:

$$g(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} x\right) \quad \text{mit} \quad T = 2\,l\,.$$

Diese Darstellungen von g kennen wir aus dem Kapitel zur Fourierreihenentwicklung: Die Koeffizienten a_n sind die Fourierkoeffizienten der Funktion g, falls g eine gerade Funktion auf dem Intervall $[-l, l)$ der Länge $T = 2l$ ist.

Wir setzen g entsprechend fort und erhalten die Lösung $u = u(t,x)$ wie folgt:

Rezept: Lösen eines (modifizierten) Nullrandproblems für einen Stab
Die Lösung $u = u(t,x)$ des Nullrandproblems

$$u_t = c^2 u_{xx} \text{ für } x \in (0,l),\ t \geq 0 \text{ und } u(0,x) = g(x) \text{ und } u_x(t,0) = 0 = u_x(t,l)$$

erhält man wie folgt:

1. Bestimme die Koeffizienten a_n durch:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos\left(n \frac{\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \quad \text{für} \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, 3\, \ldots\,.$$

2. Erhalte die Lösung $u = u(t,x)$ als Reihendarstellung:

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c^2 (n\pi/l)^2 t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right) .$$

Aufgabe 8 (Wellengleichung) Man ermittle eine Lösung für das folgende Anfangs-Randwertproblem für eine schwingende Saite der Länge $l = 2$, wobei

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ mit } u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right), \; u_t(x,0) = 0, \; u(0,t) = u(l,t) = 0\,.$$

Lösung: Die Fourierreihenentwicklung der Funktion $g = g(x)$ lautet

$$g(x) \sim \frac{7}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\,.$$

Daher ist

$$u(x,t) = \frac{7}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems.

Aufgabe 9 (Wellengleichung) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem der Wellengleichung,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(0,x) &= g(x), \\ u_t(0,x) &= v(x), \end{aligned}$$

die Lösung

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(g(x+c\,t) + g(x-c\,t)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)\mathrm{d}\xi$$

besitzt. Gehen Sie zu diesem Zweck zu den Koordinaten $T = x - ct, X = x + ct$ über, leiten Sie eine Gleichung für $U(T,X) = u(t,x)$ her, und stellen Sie die erhaltene Lösung in den ursprünglichen Koordinaten t, x dar.

Lösung: Zunächst leiten wir eine allgemeine Lösung der Wellengleichung durch Koordinatentransformation her und erst danach kümmern wir uns um die Anfangsbedingungen.

Allg. Lösung der Wellengleichung: Als erstes müssen wir die Ableitungen u_{tt} und u_{xx} mithilfe von U, T, X ausdrücken. Aus der Definition

$$u(t,x) = U(T,X) = U\left(x - ct, x + ct\right)$$

erhalten wir (Kettenregel beachten!):

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= -cU_T\left(x - ct, x + ct\right) + cU_X\left(x - ct, x + ct\right) \\ u_{tt}(t,x) &= c^2 U_{TT} - 2c^2 U_{TX} + c^2 U_{XX} \\ u_x(t,x) &= U_T\left(x - ct, x + ct\right) + U_X\left(x - ct, x + ct\right) \\ u_{xx}(t,x) &= U_{TT} + 2U_{TX} + U_{XX} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$0 = u_{tt} - c^2\, u_{xx} = c^2 U_{TT} - 2c^2 U_{TX} + c^2 U_{XX} - c^2\,(U_{TT} + 2U_{TX} + U_{XX}) = -4c^2 U_{TX}.$$

Die Gleichung $U_{TX} = 0$ können wir durch zweimaliges Integrieren lösen (einmal bez. X, einmal bez. T). Also:

$$\begin{aligned} U_T(T,X) &= \tilde{f}_1(T), \\ U(T,X) &= \int^T \tilde{f}_1(T)\mathrm{d}T + f_2(X) = f_1(T) + f_2(X), \end{aligned}$$

wobei $f_1(T)$ und $f_2(X)$ noch zu bestimmende Funktionen sind ($f_1(T)$ bezeichne eine Stammfunktion von $\tilde{f}_1(T)$). Indem wir zu den ursprünglichen Koordinaten t, x zurückkehren, erhalten wir nun die Lösung:

$$u(t,x) = U(T,X) = U(x-ct, x+ct) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct). \tag{0.1}$$

Bestimmen der speziellen Lösung anhand der Anfangsbedingungen: Aus (0.1) erhalten wir durch Einsetzen von $t = 0$

$$\begin{aligned} u(0,x) &= f_1(x) + f_2(x) \overset{!}{=} g(x), \\ u_t(0,x) &= -cf_1'(x) + cf_2'(x) \overset{!}{=} v(x), \end{aligned}$$

und somit können wir f_1 und f_2 durch g und v ausdrücken. Integration der zweiten Gleichung ergibt

$$f_1(x) - f_2(x) = -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C$$

und Addition bzw. Subtraktion der ersten Gleichung liefert

$$2f_1(x) = g(x) - \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C \quad \text{und} \quad 2f_2(x) = g(x) + \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi - C.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (0.1) ein, so erhalten wir die Lösung

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\,(g(x-ct) + g(x+ct)) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x-ct} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x+ct} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2}\,(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Diese Lösung heißt *d'Alembertsche Lösung.* Man kann sie alternativ unter Verwendung der Fouriertransformation herleiten. Außerdem gibt es eine leichte Verallgemeinerung für den Fall einer *inhomogenen* Wellengleichung (siehe nächste Aufgabe).

Aufgabe 10 (Wellengleichung) Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem der inhomogenen Wellengleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} = -2x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0 \quad \text{und} \quad u(0,x) = u_t(0,x) = 0.$$

Leiten Sie anhand der folgenden Schritte eine Lösung $u(t,x)$ dieses Problems her:

(a) Gehen Sie zu den Variablen $T = x - t$, $X = x + t$ und $U(T,X) = u(t,x)$ über und drücken Sie $u_{tt}(t,x)$ und $u_{xx}(t,x)$ durch U, T und X aus.
(b) Zeigen Sie, dass $U(T,X) = u(t,x)$ der Gleichung $4U_{XT}(T,X) = X + T$ genügt.
(c) Lösen Sie die Gleichung $4U_{XT}(T,X) = X + T$ durch Integration über das Normalgebiet

$$T_* \leq X \leq X_*, \quad T_* \leq T \leq X$$

und erhalten Sie somit den Wert $U(T_*, X_*)$ an einem beliebigen Punkt (T_*, X_*). (*Tipp*: $U_X(X,X) = 0$ und $U(T_*, T_*) = 0$.)
(d) Erhalten Sie die Lösung $u(t,x)$ der Ausgangsgleichung, indem Sie zu den Koordinaten t, x zurückkehren.
(e) Führen Sie eine Probe durch.

Lösung:

Die Idee des Variablenwechsels ist bereits von den konstanten pDGlen 1. Ordnung bekannt; diese Aufgabe zeigt ihre Nützlichkeit auch für pDGlen höherer Ordnung.

(a) Als erstes müssen wir die Ableitungen u_{tt} und u_{xx} mithilfe von U, T, X ausdrücken. Aus der Definition

$$u(t,x) = U(T,X) = U\left(x - t, x + t\right)$$

erhalten wir (Kettenregel beachten!):

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= -U_T\left(x - t, x + t\right) + U_X\left(x - t, x + t\right) \\ u_{tt}(t,x) &= U_{TT} - 2U_{XT} + U_{XX} \\ u_x(t,x) &= U_T\left(x - t, x + t\right) + U_X\left(x - t, x + t\right) \\ u_{xx}(t,x) &= U_{TT} + 2U_{XT} + U_{XX} \end{aligned}$$

Also:

$$u_{tt} - u_{xx} = U_{TT} - 2U_{XT} + U_{XX} - \left(U_{TT} + 2U_{XT} + U_{XX}\right) = -4U_{XT}.$$

(b) Mit $2x = X + T$ erhalten wir insgesamt für U die Gleichung $4U_{XT} = X + T$.

(c) Die Gleichung $4U_{XT} = X + T$ lösen wir durch Integration über $T_* \leq X \leq X_*, T_* \leq T \leq X$. Auf der linken Seite erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4\int_{T_*}^{X_*}\int_{T_*}^{X} U_{XT}(T,X)\,\mathrm{d}T\mathrm{d}X &= 4\int_{T_*}^{X_*}\left[U_X(T,X)\right]_{T=T_*}^{X}\,\mathrm{d}X = 4\int_{T_*}^{X_*}\underbrace{U_X(X,X)}_{=0} - U_X(T_*,X)\,\mathrm{d}X \\ &= -4\left[U(T_*,X)\right]_{X=T_*}^{X_*} = -4\big(U(T_*,X_*) - \underbrace{U(T_*,T_*)}_{=0}\big) = -4U(T_*,X_*), \end{aligned}$$

wobei (laut Anfangsbedingung) $2U_X(X,X) = u_t(0,X) + u_x(0,X) = 0$ und $U(T_*,T_*) = U(x_* - t_*, x_* - t_*) = u(0, x_* - t_*) = 0$ ist. Auf der rechten Seite erhalten wir:

$$\int_{T_*}^{X_*}\int_{T_*}^{X} X + T\,\mathrm{d}T\mathrm{d}X = \int_{T_*}^{X_*}\left[XT + \frac{T^2}{2}\right]\Bigg|_{T=T_*}^{X} \mathrm{d}X = \int_{T_*}^{X_*} \frac{3}{2}X^2 - T_*X - \frac{1}{2}T_*^2\,\mathrm{d}X$$

$$= \left[\frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{2}T_*X^2 - \frac{1}{2}T_*^2X\right]_{X=T_*}^{X_*} = \frac{1}{2}X_*^3 - \frac{1}{2}T_*X_*^2 - \frac{1}{2}T_*^2X_* + \frac{1}{2}T_*^3 = \frac{1}{2}(X_*+T_*)(X_*-T_*)^2.$$

Also: $-4\,U(T_*,X_*) = \frac{1}{2}(X_* + T_*)(X_* - T_*)^2$.

(d) Wir haben also gezeigt: $U(T,X) = -\frac{1}{8}(X+T)(X-T)^2$. Mit $2x = X + T$ und $2t = X - T$ folgt daraus

$$u(t,x) = U(T,X) = -\frac{1}{8}(X+T)(X-T)^2 = -\frac{1}{8}(2x)(2t)^2 = -xt^2.$$

(e) Nachrechnen ergibt $u_{tt} = -2x$ und $u_{xx} = 0$, also $u_{tt} - u_{xx} = -2x$.

Bemerkung: Diese Methode funktioniert für eine beliebige rechte Seite $f(t,x)$. Durch Addition mit der d'Alembertschen Lösung kann man somit eine Lösungsformel für das inhomogene Anfangswertproblem der Wellengleichung auf $\mathbb{R}$ erhalten.

Aufgabe 11 (Charakteristiken) Lösen Sie die folgenden pDGlen 1. Ordnung:

11.1 $u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,0) = u_0(x)$

11.2 $u_x + u_y = u^2$ mit $u(x,-x) = x$

11.3 $xu_x + yu_y + u_z = u$ mit $u(x,y,0) = xy$

Lösung:

(.1) Wir verwenden die Charakteristiken-Methode und erhalten das folgende AWP:

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= 1, & x(0) &= x_0,\\ \dot{y}(s) &= 2, & y(0) &= 0,\\ \dot{w}(s) &= 0, & w(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Dabei ist $w(s) := u(x(s), y(s))$ der Wert der Funktion $u(x,y)$ entlang der Charakteristik $(x(s), y(s))$.
Die ersten beiden Gleichungen sind leicht gelöst: $x(s) = x_0 + s$ und $y(s) = 2s$.

Da sich w nicht ändert ($\dot{w} = 0$) hat die Lösung entlang der Charakteristik den Wert $u_0(x_0)$, also gilt

$$u(x(s), y(s)) = u_0(x_0)$$

wir ersetzen nun $x_0 = x - s$ und verwenden zusätzlich $s = y/2$ und erhalten die Lösung

$$u(x, y) = u_0 \left(x - \frac{y}{2} \right).$$

(.2) Wir verwenden die Charakteristiken-Methode und erhalten das folgende AWP:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= 1, & x(0) &= x_0, \\
\dot{y}(s) &= 1, & y(0) &= -x_0, \\
\dot{w}(s) &= w(s)^2, & w(0) &= x_0.
\end{aligned}$$

Dabei ist $w(s) := u(x(s), y(s))$ der Wert der Funktion $u(x, y)$ entlang der Charakteristik $(x(s), y(s))$. Die ersten beiden Gleichungen sind leicht gelöst: $x(s) = x_0 + s$ und $y(s) = -x_0 + s$. Für die dritte Gleichung können wir Trennung der Variablen anwenden und erhalten $w(s) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - s}$. Setzen wir $s = \frac{x+y}{2}$ und $x_0 = \frac{x-y}{2}$ in diese Formel ein, so erhalten wir die Lösung

$$u(x, y) = \frac{1}{\frac{2}{x-y} - \frac{x+y}{2}} = \frac{2(x-y)}{4 - x^2 + y^2}.$$

(.3) Die Charakteristiken-Methode liefert das System

$$\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= x(s), & x(0) &= x_0, \\
\dot{y}(s) &= y(s), & y(0) &= y_0, \\
\dot{z}(s) &= 1, & z(0) &= 0, \\
\dot{w}(s) &= w(s), & w(0) &= x_0 y_0,
\end{aligned}$$

dessen Lösung wir durch Integration erhalten:

$$x(s) = x_0 e^s, \quad y(s) = y_0 e^s, \quad z(s) = s, \quad w(s) = x_0 y_0 e^s.$$

Durch Umstellen und Einsetzen bekommen wir daraus: $u(x, y, z) = xye^{-z}$.

Aufgabe 12 (Charakteristiken) Wir betrachten für $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem der Burgers-Gleichung,

$$u_t + uu_x = 0, \quad \text{mit} \quad u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x \leq 0, \\ 0, & 0 < x. \end{cases}$$

12.1 Wenden Sie die Methode der Charakteristiken an, um die PDE in ein System von ODEs zu verwandeln.

12.2 Lösen Sie das in (.1) erhaltene System von ODEs.

12.3 Skizzieren Sie die charakteristischen Kurven in der x-t-Ebene und schreiben Sie die in (.2) erhaltene Lösung $u(t,x)$ möglichst explizit auf.

12.4 Bestimmen Sie einen Zeitpunkt t_*, an dem sich zwei verschiedene charakteristische Kurven schneiden.

12.5 (Zusatz:) Benutzen Sie (.4), um zu begründen, dass die gefundene Lösung $u(t,x)$ nicht für alle $t > 0$ stetig sein kann.

Lösung: (.1) Anwendung der Methode der Charakteristiken liefert das folgende System von ODEs:

$$\begin{aligned} \dot{t}(s) &= 1, & t(0) &= 0 \\ \dot{x}(s) &= u(t(s), x(s)), & x(0) &= x_0 \\ \dot{v}(s) &= 0, & v(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

(.2) Die erste Gleichung liefert sofort $t(s) = s$. Die dritte Gleichung liefert $u(s) = u_0(x_0)$, d.h., die Lösung u ist entlang der charakteristischen Kurve konstant. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir durch Integration bezüglich s

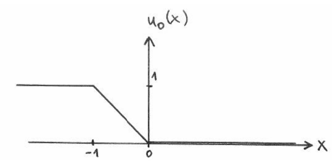
$$x(s) = x_0 + s\, u_0(x_0). \tag{0.2}$$

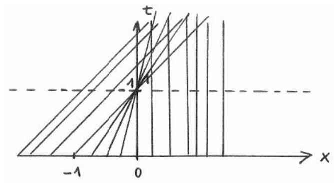
Das können wir noch genauer angeben, indem wir danach unterscheiden, wo x_0 liegt:
$x_0 \leq -1$: Die charakteristische Kurve ist $x(s) = x_0 + s$.
$-1 < x_0 \leq 0$: Die charakteristische Kurve ist $x(s) = (1-s)x_0$.
$0 < x_0$: Die charakteristische Kurve ist $x(s) = x_0$.
Siehe Skizze.

(.3) Unter Verwendung von (.2) können wir also die Lösung $u(t,x)$ für $t \in [0,1)$ wie folgt angeben:

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & x < t-1, \\ \frac{x}{t-1}, & t-1 \leq x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizzen:





(.4) Anhand der Fallunterscheidung in (.2) stellen wir fest, dass sich die Charakteristiken, die bei $x_0 = -1$ bzw. $x_0 = 0$ beginnen bei $t_* = 1$ schneiden. Übrigens ist dieser Punkt $x_* = 0, t_* = 1$ überhaupt der erste Schnittpunkt aller Charakteristiken, also auch derer, die in Punkten $x_0 \in (-1, 0)$ beginnen. Siehe Skizze.

(.5) Offenbar tritt eine Unstetigkeit der Lösung auf, sobald sich die charakteristischen Kurven schneiden und die jeweils konstanten Werte von u entlang dieser Kurven verschieden sind. Nach (.4) ist das bei $t = 1$ der Fall. Betrachtet man in der Beschreibung von $u(t, x)$ unter (.3) den Grenzwert $t \to 1$, so kann man in der Tat jeden Wert aus $[0, 1]$ erhalten, je nach dem, entlang welcher Charakteristik man sich bewegt.

Bemerkung: Gemäß (.5) muss man ab $t = 1$ andere Methoden heranziehen um eine wohldefinierte (und zudem physikalisch sinnvolle) Lösung zu konstruieren; das ist ein echtes Problem. Wir haben hier ein echt nicht-lineares Phänomen kennengelernt, nämlich die Entstehung von Schockwellen, d. h. von unstetigen Lösungen, nach endlicher Zeit. Das ist ein charakteristisches Merkmal von hyperbolischen Gleichungen.

Aufgabe 13 (verschiedene Ansätze) Lösen Sie die folgenden PDEs mit dem angegebenen Ansatz.

13.1 $u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x, 0) = u_0(x)$ (Separationsansatz)

13.2 $y^2(u_x)^2 + x^2(u_y)^2 = (xyu)^2$ (Separationsansatz)

13.3 $yu_x + xu_y = 0$ (Ansatz $u(x, y) = f(x) + g(y)$)

13.4 $u_t + 2uu_x = u_{xx}$ (Ansatz $u(t, x) = v(x - 2t)$ mit $\lim\limits_{\xi \to -\infty} v(\xi) = 2$)

Lösung: (.1) Ansatz: $u(x, y) = f(x)g(y)$. Einsetzen in die PDE liefert: $f'(x)g(y) + 2f(x)g'(y) = 0$. Durch Umstellen und Division durch $f(x)g(y)$ erhalten wir die separierte Form $\frac{f'(x)}{f(x)} = -2\,\frac{g'(y)}{g(y)}$. Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn linke und rechte Seite jeweils gleich einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$ sind. Also:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k, \quad \text{und} \quad -2\,\frac{g'(y)}{g(y)} = k.$$

Multipliziert man die ODE für f mit $f(x)$, so erhält man $f'(x) = kf(x)$, woraus man die Lösung $f(x) = c_1 e^{kx}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$ abliest.

Analog erhält man für g die ODE $g'(y) = -\frac{1}{2}g(y)$, deren Lösung $g(y) = c_2 e^{-\frac{k}{2}y}$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$ lautet.
Somit ist $u(x,y) = f(x)g(y) = c_1 c_2\, e^{kx} e^{-\frac{k}{2}y} = c_1 c_2\, e^{k\left(x-\frac{y}{2}\right)}$.
Bemerkung: Man sieht, dass wir hier im Allgemeinen *nicht* die gleiche Lösung gefunden haben wie in Aufgabe 11.1.

(.2) Ansatz: $u(x,y) = f(x)g(y)$. Einsetzen in die pDGl liefert:

$$y^2(f'(x))^2 g(y)^2 + x^2 f(x)^2 (g'(y))^2 = x^2 y^2 f(x)^2 g(y)^2.$$

Nachdem wir durch $x^2 y^2 f(x)^2 g(y)^2$ geteilt haben, können wir die Gleichung separieren:

$$\frac{1}{x^2}\frac{(f'(x))^2}{f(x)^2} = 1 - \frac{1}{y^2}\frac{(g'(y))^2}{g(y)^2}$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{1}{x^2}\frac{(f'(x))^2}{f(x)^2} = k \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{y^2}\frac{(g'(y))^2}{g(y)^2} = k.$$

Die Gleichung für f bekommt durch Umstellen und Wurzelziehen (offenbar muss $k \geq 0$ sein) die Form: $f'(x) = \pm\sqrt{k}xf(x)$, also ist $f(x) = c_1 e^{\pm\frac{\sqrt{k}}{2}x^2}$.
Analog erhalten wir für g die Gleichung $g'(y) = \pm\sqrt{1-k}yg(y)$ (hierfür muss $k \leq 1$ gelten), also $g(y) = c_2 e^{\pm\frac{\sqrt{1-k}}{2}y^2}$.

Wir haben damit gezeigt, dass die Funktion

$$u(x,y) = c_1 c_2 e^{\pm\frac{\sqrt{k}}{2}x^2} e^{\pm\frac{\sqrt{1-k}}{2}y^2} = c e^{\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}x^2+\sqrt{1-k}y^2\right)}$$

für jedes $k \in [0,1]$ und $c = c_1 c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der gegebenen PDE ist.

(.3) Nun soll der Ansatz $u(x,y) = f(x) + g(y)$ verwendet werden. Ansonsten ist die Vorgehensweise wie bei den vorhergehende Aufgaben: Einsetzen, Separieren, Lösen.

Ansatz einsetzen und Variablen separieren: Setzen wir $u(x,y) = f(x) + g(y)$ in die PDE ein, so erhalten wir unter Verwendung von $u_x = f'(x)$ und $u_y = g'(y)$:

$$yf'(x) + xg'(y) = 0, \quad \text{also in separierter Form} \quad \frac{f'(x)}{x} = -\frac{g'(y)}{y}.$$

Also haben wir die beiden gDGlen $\frac{f'(x)}{x} = k$ und $\frac{g'(y)}{y} = -k$.

Lösen der ODEs: Nach Multiplikation mit x bzw. y lösen wir die beiden Gleichungen: $f(x) = \frac{k}{2}x^2 + c_1$ und $g(y) = -\frac{k}{2}y^2 + c_2$.

Zusammenfügen und u angeben: Wir erhalten schließlich, für beliebige $c_1, c_2, k \in \mathbb{R}$, $c = c_1 + c_2$, die Lösung

$$u(x,y) = f(x) + g(y) = \left(\frac{k}{2}x^2 + c_1\right) + \left(-\frac{k}{2}y^2 + c_2\right) = \frac{k}{2}\left(x^2 - y^2\right) + c.$$

In diesem Fall ist ein Ansatz für eine spezielle Sorte von Lösungen gegeben. Durch Einsetzen erhält man eine gDGl, die man lösen kann. Separieren ist hier nicht nötig. Es ist $u(t,x) = v(x-2t)$, also gilt

$$u_t(t,x) = -2v'(x-2t), \quad u_x(t,x) = v'(x-2t), \quad u_{xx}(t,x) = v''(x-2t).$$

Das setzen wir in die PDE ein und erhalten mit der Bezeichnung $\xi = x - 2t$:

$$v''(\xi) = -2v'(\xi) + 2v(\xi)v'(\xi).$$

Die Gleichung können wir einmal integrieren (von $-\infty$ bis ξ): $v'(\xi) = -2v(\xi) + v(\xi)^2 - (-2v(-\infty) + v(-\infty)^2)$. Wegen $\lim_{\xi\to-\infty} v(\xi) = 2$ erhalten wir nun $v' = -2v + v^2$. Die Lösung dieser Gleichung (die man durch Trennung der Variablen findet) war als Hinweis angegeben: $v(\xi) = 1 + \tanh(-\xi)$. Somit ist die Lösung der PDE gegeben durch:

$$u(t,x) = 1 + \tanh(-(x-2t)).$$

Bemerkung: Lösungen von der Form $u(t,x) = v(x-ct)$ heißen travelling waves. Sie haben die Besonderheit, dass sich ihre Form, die durch den Graphen von $v(\xi)$ gegeben ist, mit der Zeit unveränderlich und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Aufgabe 14 (Schwache Ableitung) Bestimme jeweils die schwache Ableitung der folgenden Funktionen und zeige, dass es sich dabei auch tatsächlich um die korrekte schwache Ableitung handelt:

14.1

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

14.2

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \sin(x) & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ x - \pi & \text{für } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Lösung: (.1) Wir setzen u in die Formel für die schwache Ableitung ein und leiten partiell ab.

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= -\int\limits_{0}^{1} x\phi'(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} \phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\left. x\phi(x)\right|_0^1 + \int\limits_{0}^{1} \phi\mathrm{d}x - \left.\phi(x)\right|_1^2 + \int\limits_{1}^{2} 0\phi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Da $\phi \in C_C^\infty\,[0,2]$ gilt $\phi(0) = \phi(2) = 0$ und somit folgt nach Auswertung der Integrationsgrenzen

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= -1\phi(1) + 0\phi(0) + \int\limits_{0}^{1} \phi\mathrm{d}x - \phi(2) + \phi(1) + \int\limits_{1}^{2} 0\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\phi(1) + \phi(1) + \int\limits_{0}^{1} \phi(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} 0\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{0}^{1} 1\phi(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} 0\phi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Wir können nun die schwache Ableitung einfach ablesen:

$$
v(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}
$$

(.2) Wir setzen u in die Formel für die schwache Ableitung ein und leiten partiell ab.

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= -\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}x\phi'(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\phi'(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{\pi}^{2\pi} (x-\pi)\,\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\left.\frac{2}{\pi}x\phi(x)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\phi(x)\mathrm{d}x - \left.\sin(x)\phi(x)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\phi(x)\mathrm{d}x \ldots \\
&\qquad - \left.(x-\pi)\,\phi(x)\right|_{\pi}^{2\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \phi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Da $\phi \in C_C^\infty\,[0,2\pi]$ gilt $\phi(0) = \phi(2\pi) = 0$ und somit folgt nach Auswertung der Integrationsgrenzen

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \quad & -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{\pi}0\phi\left(0\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\phi\left(x\right)\mathrm{d}x-\sin\left(\pi\right)\phi\left(\pi\right)\dots \\
& +\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(x\right)\phi\left(x\right)\mathrm{d}x-\left(2\pi-\pi\right)\phi\left(2\pi\right)\dots \\
& +\left(\pi-\pi\right)\phi\left(\pi\right)+\int_{\pi}^{2\pi}\phi\left(x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\phi\left(x\right)\mathrm{d}x+\phi\left(\frac{\pi}{2}\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(x\right)\phi\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\phi\left(x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\phi\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(x\right)\phi\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\phi\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Wir können nun die schwache Ableitung einfach ablesen:

$$
v(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi} & \text{für } 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ \cos(x) & \text{für } \frac{\pi}{2}\leq x<\pi\\ 1 & \text{für } \pi\leq x\leq 2\pi\end{cases}
$$

Aufgabe 15 Das Flächenstück $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch

$$
x^2+y^2+z=3,\quad (x-1)^2+y\leq 4,\quad y\geq 0.
$$

15.1 Skizzieren Sie die Projektion von $\mathcal{F}$ auf die x,y-Ebene.

15.2 Für das Vektorfeld

$$
\vec{g}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\vec{x}:=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\0\\-x\end{pmatrix}
$$

berechne man das Obeflächenintegral $\int_{\mathcal{F}}\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{F}$.

Lösung:
(.1) Da wir nur an der Projektion auf die x,y-Ebene interessiert sind, müssen wir nur überlegen, für welche x- und y-Werte unser Flächenstück definiert ist. Aus den Ungleichungen sehen wir, dass

$$
(x-1)^2\leq 4\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3.
$$

Denn sonst wäre $(x-1)^2 + y \leq 4$ für kein $y \geq 0$ erfüllt. Wählen wir nun x fest, so folgt

$$0 \leq y \leq 4-(x-1)^2.$$

Wir können das Gebiet als Normalbereich schreiben

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4-(x-1)^2\}.$$

Dies ist leicht zu skizzieren, denn bei A handelt es sich um den Bereich, den der Graph von $f(x) = 4-(x-1)^2$ mit der x-Achse einschließt.

(.2) Wir können unsere Fläche folgendermaßen mit einer Funktion ϕ parametrisieren:

$$\phi : A \to \mathbb{R}^3,\ \phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3-x^2-y^2 \end{pmatrix},$$

wobei A das Gebiet aus Teilaufgabe (.1) ist. Der nach außen zeigende Normalenvektor berechnet sich zu (vgl. Skript)

$$\phi_x(x,y) \times \phi_y(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}(3-x^2-y^2) \\ -\frac{\partial}{\partial y}(3-x^2-y^2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir das Oberflächenintegral bestimmen

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{F} &= \int\limits_{x=-1}^{3} \int\limits_{y=0}^{4-(x-1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{x=-1}^{3} \int\limits_{y=0}^{4-(x-1)^2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{x=-1}^{3} 4x - x(x-1)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{x=-1}^{3} -x^3 + 2x^2 + 3x \ \mathrm{d}x = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 16 Man berechne das Volumen von

$$\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2 \geq \rho\},\ 0 < \rho < R$$

in Zylinderkoordinaten!!!

Lösung:
Wir können $\mathcal{K}$ als Normalbereich von Zylinderkoordinaten beschreiben

$$\mathcal{K} = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -\sqrt{R^2-r^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-r^2}\}.$$

Somit folgt für unser Volumen (nicht vergessen, dass $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathcal{K}) = \int_0^{2\pi}\int_\rho^R\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\ \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi &= 2\pi\int_\rho^R 2r\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\int_\rho^R 2r(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_\rho^R = \frac{4\pi}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$