Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Partielle Differentialgleichungen

Autor: Benjamin Rüth, Korbinian Singhammer
Stand: 12. März 2015

Aufgabe 1 (Klassifizierung) Man bestimme die Typen der pDGlen und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

1.1

$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_x + 4u_y = 2u$

1.2

$x^3 u_{xx} + 2u_{xy} + y^3 u_{yy} + u_x - yu_y = e^x$

1.3

$yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = y^2 + \ln(1 + x^2)$

Aufgabe 2 (Separationsansatz) Finden Sie mit Hilfe des Separationsansatzes Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

2.1

$x^2\, u_x + \frac{1}{y}\, u_y = u$

2.2

$x^2\, u_{xy} + 3y^2\, u = 0$

Aufgabe 3 (Separationsansatz) Wir betrachten die Laplace-Gleichung $-\Delta u = 0$ auf der Menge $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

3.1 Finden Sie eine Lösung der Gleichung, die den Randwert $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ für $x \in [0, 1]$ und $u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0$ für $x, y \in [0, 1]$ annimmt.

3.2 Finden Sie eine Lösung der Gleichung, die den Randwert $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ für $x \in [0, 1]$ und $u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0$ für $x, y \in [0, 1]$ annimmt.

3.3 Prüfen Sie nach, dass die Gleichung das Superpositionsprinzip erfüllt: Sind u_1 und u_2 Lösungen der Gleichung und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so ist auch $c_1 u_1 + c_2 u_2$ Lösung der Gleichung.

3.4 Verwenden Sie (.1-.3), um eine Lösung anzugeben, die den Randwert $u(x, 0) = \sin(\pi x)(1 + 2\cos(\pi x))$ für $x \in [0, 1]$ und $u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0$ für $x, y \in [0, 1]$ annimmt.

3.5 Wir betrachten die Laplace-Gleichung $-\Delta u(x, y) = 0$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ mit den Randbedingungen

$$u(x, 0) = x(1 - x),\ u(x, 1) = 0,\ u(0, y) = 0,\ u(1, y) = 0.$$

Geben Sie eine Darstellung der exakten Lösung $u(x, y)$ an.
Tipp: Separationsansatz, sin-Fourier-Reihenentwicklung, Superpositionsprinzip.

Aufgabe 4 (Separationsansatz) Gesucht wird eine Lösung des Anfangs–Randwertproblems

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}(x,t) - 4\,u_t(x,t) - 3\,u(x,t) = 0 && \text{für } x \in [0,\pi],\ t \in [0,\infty), && (1)\\
&u(x,0) = x\left(x^2 - \pi^2\right) && \text{für } x \in [0,\pi] \quad \text{(Anfangswerte)}, && (2)\\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0 && \text{für } t \in [0,\infty) \quad \text{(Randwerte)}. && (3)
\end{aligned}
$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Finden Sie mit dem Separationsansatz möglichst viele reelle Lösungen zu (1).

(b) Identifizieren Sie darunter diejenigen Lösungen $u_n(x,t)$, die die Randbedingung (3) erfüllen.

(c) Entwickeln Sie die Anfangsbedingung $g(x) := x\,(x^2 - \pi^2)$ auf $[-\pi, \pi]$ in eine Fourier-Reihe.

(d) Machen Sie den Superpositionsansatz $u(x,t) = \sum u_n(x,t)$ mit den u_n aus (b) und finden Sie so eine Lösung zum Anfangsrandwertproblem (1)–(3).

Aufgabe 5 (Klassifizierung, Charakteristiken, Separationsansatz) Die folgende PDE ist gegeben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,u = u(x,t)\ ,\alpha \in \mathbb{R}$$

5.1 Von welchem Typ ist die PDE? Skizzieren Sie ggf. die Gebiete unterschiedlichen Typs in Abhängigkeit von α.

5.2 Berechnen Sie für $\alpha = 2$ mit Hilfe des Separationsansatzes diejenigen Lösungen, die die folgende Randbedingungen erfüllen:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(a,t) = 0, \qquad 0 < a < \infty$$

5.3 Führen Sie mit Ihrer gefundenen Lösung die Probe durch.

Aufgabe 6 (Wärmeleitungsgleichung) Lösen Sie das Nullrandproblem mit

$$u_t = u_{xx} \text{ für } x \in (0,1),\ t \geq 0 \text{ und } u(0,x) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(2\pi x)\,.$$

Aufgabe 7 (Wärmeleitungsgleichung) Lösen Sie (allgemein) das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{mit} \quad u(0,x) = g(x) \quad \text{und} \quad u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$$

für einen Stab der Länge l, wobei an den Rändern kein *Wärmetransport* stattfindet, $u_x = 0$.

Aufgabe 8 (Wellengleichung) Man ermittle eine Lösung für das folgende Anfangs-Randwertproblem für eine schwingende Saite der Länge $l = 2$, wobei

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ mit } u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right), \; u_t(x,0) = 0, \; u(0,t) = u(l,t) = 0\,.$$

Aufgabe 9 (Wellengleichung) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem der Wellengleichung,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(0,x) &= g(x), \\ u_t(0,x) &= v(x), \end{aligned}$$

die Lösung

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(g(x+c\,t) + g(x-c\,t)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)\mathrm{d}\xi$$

besitzt. Gehen Sie zu diesem Zweck zu den Koordinaten $T = x - ct, X = x + ct$ über, leiten Sie eine Gleichung für $U(T,X) = u(t,x)$ her, und stellen Sie die erhaltene Lösung in den ursprünglichen Koordinaten t, x dar.

Aufgabe 10 (Wellengleichung) Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem der inhomogenen Wellengleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} = -2x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0 \quad \text{und} \quad u(0,x) = u_t(0,x) = 0.$$

Leiten Sie anhand der folgenden Schritte eine Lösung $u(t,x)$ dieses Problems her:

(a) Gehen Sie zu den Variablen $T = x - t$, $X = x + t$ und $U(T,X) = u(t,x)$ über und drücken Sie $u_{tt}(t,x)$ und $u_{xx}(t,x)$ durch U, T und X aus.
(b) Zeigen Sie, dass $U(T,X) = u(t,x)$ der Gleichung $4U_{XT}(T,X) = X + T$ genügt.
(c) Lösen Sie die Gleichung $4U_{XT}(T,X) = X + T$ durch Integration über das Normalgebiet

$$T_* \leq X \leq X_*, \quad T_* \leq T \leq X$$

und erhalten Sie somit den Wert $U(T_*, X_*)$ an einem beliebigen Punkt (T_*, X_*). (*Tipp*: $U_X(X,X) = 0$ und $U(T_*,T_*) = 0$.)

(d) Erhalten Sie die Lösung $u(t,x)$ der Ausgangsgleichung, indem Sie zu den Koordinaten t, x zurückkehren.
(e) Führen Sie eine Probe durch.

Aufgabe 11 (Charakteristiken) Lösen Sie die folgenden pDGlen 1. Ordnung:

11.1 $u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,0) = u_0(x)$

11.2 $u_x + u_y = u^2$ mit $u(x,-x) = x$

11.3 $xu_x + yu_y + u_z = u$ mit $u(x,y,0) = xy$

Aufgabe 12 (Charakteristiken) Wir betrachten für $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem der Burgers-Gleichung,

$$u_t + uu_x = 0, \quad \text{mit} \quad u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ -x, & -1 < x \leq 0, \\ 0, & 0 < x. \end{cases}$$

12.1 Wenden Sie die Methode der Charakteristiken an, um die PDE in ein System von ODEs zu verwandeln.

12.2 Lösen Sie das in (.1) erhaltene System von ODEs.

12.3 Skizzieren Sie die charakteristischen Kurven in der x-t-Ebene und schreiben Sie die in (.2) erhaltene Lösung $u(t,x)$ möglichst explizit auf.

12.4 Bestimmen Sie einen Zeitpunkt t_*, an dem sich zwei verschiedene charakteristische Kurven schneiden.

12.5 (Zusatz:) Benutzen Sie (.4), um zu begründen, dass die gefundene Lösung $u(t,x)$ nicht für alle $t > 0$ stetig sein kann.

Aufgabe 13 (verschiedene Ansätze) Lösen Sie die folgenden PDEs mit dem angegebenen Ansatz.

13.1 $u_x + 2u_y = 0$ mit $u(x,0) = u_0(x)$ (Separationsansatz)

13.2 $y^2(u_x)^2 + x^2(u_y)^2 = (xyu)^2$ (Separationsansatz)

13.3 $yu_x + xu_y = 0$ (Ansatz $u(x,y) = f(x) + g(y)$)

13.4 $u_t + 2uu_x = u_{xx}$ (Ansatz $u(t,x) = v(x-2t)$ mit $\lim_{\xi \to -\infty} v(\xi) = 2$)

Aufgabe 14 (Schwache Ableitung) Bestimme jeweils die schwache Ableitung der folgenden Funktionen und zeige, dass es sich dabei auch tatsächlich um die korrekte schwache Ableitung handelt:

14.1

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

14.2

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin(x) & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ x - \pi & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Aufgabe 15 Das Flächenstück $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch

$$x^2 + y^2 + z = 3, \quad (x-1)^2 + y \leq 4, \quad y \geq 0.$$

15.1 Skizzieren Sie die Projektion von $\mathcal{F}$ auf die x, y-Ebene.

15.2 Für das Vektorfeld

$$\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

berechne man das Obeflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{F}$.

Aufgabe 16 Man berechne das Volumen von

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 \geq \rho\},\ 0 < \rho < R$$

in Zylinderkoordinaten!!!