Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker

Übung: Fouriertransformation

Autor: Benjamin Rüth, Korbinian Singhammer
Stand: 12. März 2015

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die cos-sin-Darstellungen der Fourierreihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

1.1 $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi)$,

1.2 $f(x) = (x-\pi)^2$ für $x \in [0, 2\pi)$,

1.3 $f(x) = |\sin x|$ für $x \in [-\pi, \pi)$,

1.4 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

Lösung:
(.1) Da die Funktion f ungerade ist, erhalten wir für die Koeffizienten $a_n = 0$ und für b_n gilt:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}\right]\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^4}\int_0^{\pi} x^3\sin(nx)x - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^4}\left[\frac{-1}{n}x^3\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{6}{n\pi^4}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sin(nx) - nx\cos(nx)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\frac{-2x^3}{n\pi^4}\cos(nx) - \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(nx) + \frac{2x}{n\pi^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&+ \frac{6}{n\pi^4}\left[\frac{1}{n^3}\Big(-2\sin(nx) + 2nx\cos(nx) + n^2x^2\sin(nx)\Big)\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\left(\frac{-2x^3}{n\pi^4} + \frac{2x}{n\pi^2} + \frac{12x}{n^3\pi^4}\right)\cos(nx) + \left(\frac{-2}{n^2\pi^2} - \frac{12}{n^4\pi^4} + \frac{6x^2}{n^2\pi^4}\right)\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= (-1)^n\left(\frac{-2\pi^3}{n\pi^4} + \frac{2\pi}{n\pi^2} + \frac{12\pi}{n^3\pi^4}\right) = (-1)^n\frac{12}{n^3\pi^3}\,.
\end{aligned}$$

Dabei benutzten wir $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Nun erhalten wir als Fourierreihe F zu f

$$F(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}\,.$$

(.2) Zur Abwechslung bestimmen wir die exp-Darstellung und ermitteln hieraus mit den Umrechnungsformeln die cos-sin-Darstellung: Für $k = 0$ erhalten wir für $f(x) = (x-\pi)^2$ mittels Substitution und aus Symmetriegründen

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2 e^0\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}2\int_0^{\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Für alle $k \neq 0$ ermitteln wir eine Stammfunktion für den Integranden aus der Formelsammlung und erhalten aus Symmetriegründen

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 e^{-ikx}\mathrm{d}x = \left[\frac{ie^{-ikx}\left(k^2(\pi-x)^2+2ik(\pi-x)-2\right)}{2\pi k^3}\right]_{x=0}^{2\pi} \\
&= \left[\frac{ie^{-ikx}2ik(\pi-x)}{2\pi k^3}\right]_{x=0}^{2\pi} = -\frac{(\pi-2\pi)-\pi}{\pi k^2} = \frac{2}{k^2}\,.
\end{aligned}
$$

Damit lautet die exp-Darstellung F von f:

$$
F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikx}}{k^2}\,.
$$

Für die cos-sin-Darstellung F beachten wir $c_{-k} = c_k$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikx}}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}} 2\frac{e^{-ikx}+e^{ikx}}{2k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,.
\end{aligned}
$$

(.3) Da f eine gerade Funktion ist, folgt $b_n = 0$. Für die Koeffizienten a_n gilt

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\cos x\cos nx\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n + 1 - n\left(\sin x\sin nx\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\mathrm{d}x\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left((-1)^n+1\right) + n^2 a_n\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhalten wir

$$
a_n = \frac{2}{\pi}\frac{\left((-1)^n+1\right)}{1-n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}\,.
$$

Damit lautet die Fourierreihe F von f:

$$
F(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos 2kx}{\pi[1-(2k)^2]} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}\,.
$$

(.4) Wir ermitteln die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Bigg[\underbrace{\sin x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos x\sin nx\mathrm{d}x\Bigg] \\
&= -\frac{1}{\pi n}\left[-\cos x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin x\cos nx\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi + 1) + \frac{1}{n^2}\,a_n = \frac{(-1)^n+1}{\pi n^2} + \frac{1}{n^2}\,a_n\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die a_n bestimmt:

$$a_n = -\frac{(-1)^n+1}{\pi(n^2-1)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -\frac{2}{\pi(n^2-1)} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\sin x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos x\cos nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[\cos x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin x\sin nx\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{n^2}\,b_n\,.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $b_n = 0$ für alle $n > 1$. Schließlich gilt:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\,.$$

Damit lautet die Fourierreihe F von f:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{2}\sin x\,.$$

Aufgabe 2 Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \pi - |x| \qquad \text{für} \quad -\pi \le x \le \pi\,.$$

2.1 Man berechne die Koeffizienten der zugehörigen cos-sin-Darstellung $S(f)(x)$.

2.2 Man bestimme mit Hilfe von Teilaufgabe (a) den Wert der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Lösung:

(.1) Da f eine gerade Funktion ist, gilt für die Koeffizienten $b_n = 0$ und

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi - x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx - \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Fourierreihe F zu f:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}\,.$$

(.2) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, gilt $F(x) = f(x)$ für alle x. Damit gilt insbesondere

$$\pi = f(0) = F(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)\,.$$

Hiermit erhalten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 3 (Faltung,schwer!) Es sei s mit $s(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $x \in [0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Sägezahnfunktion.

3.1 Zeigen Sie, dass die Faltung $(s * s)(x)$ wieder eine 2π-periodische Funktion ergibt.

3.2 Berechnen Sie die periodische Faltung $(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$ direkt.

3.3 Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der Funktion $s*s$ durch direkte Rechnung.

Lösung:
(.1) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen mit der Periode T. Dann ist die periodische Faltung von f und g wegen der Periodizität von f ebenfalls T-periodisch, denn:

$$(f * g)(x + T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x + T - t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(x - t)g(t)\,\mathrm{d}t = (f * g)(x)\,.$$

Daher ist die Faltung also wiederum periodisch.

(.1) Da die betrachtete Sägezahnfunktion 2π-periodisch ist, genügt es deshalb, die Faltung für $x \in [0, 2\pi)$ zu berechnen. Für $x \in [-2\pi, 0)$ gilt $s(x) = -\frac{x+\pi}{2}$, so dass sich auf $[0, 2\pi)$ folgendes ergibt:

$$
\begin{aligned}
(s * s)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^x s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^x (t-x+\pi)(\pi-t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{2\pi} (t-x-\pi)(\pi-t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left[2\pi^2 x - \pi x^2 - \frac{2}{3}\pi^3 \right] = \frac{6\pi x - 3x^2 - 2\pi^2}{24} = \frac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{24}
\end{aligned}
$$

Die periodische Faltung $s * s$ ist dann die 2π-periodische Fortsetzung dieser Funktion.

(.3) Für $k = 0$ ergibt sich der zugehörige Fourierkoeffizient als

$$
c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{24}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - 3u^2\right)\,\mathrm{d}u = 0,
$$

wobei die Substitution $u = x - \pi$ verwendet wurde.
Für $k \neq 0$ gilt unter Verwendung derselben Substitution:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} \left(\pi^2 - 3(x-\pi)^2\right) e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ik\pi}}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 3u^2)\, e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{-ik\pi}}{48\pi} \left[e^{-iku} \left(\frac{3u^2}{ik} - \frac{6u}{k^2} - \frac{6}{ik^3} - \frac{\pi^2}{ik} \right) \right]_{-\pi}^{\pi}
\end{aligned}
$$

Bestimmt man unter Verwendung von $e^{ik\pi} = e^{-ik\pi}$ den Wert in der eckigen Klammer, so ergibt sich schließlich für die Fourierkoeffizienten:

$$
c_k = \frac{e^{-ik\pi}}{48\pi} \left[e^{ik\pi} \left(-\frac{12\pi}{k^2} \right) \right] = -\frac{1}{4k^2}\,.
$$

Für die Fourierreihe von $s * s$ erhalten wir damit:

$$
F_{s*s}(x) = -\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikx}}{k^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad F_{s*s}(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.
$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Fouriertranformation von

$$
f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{0.1}
$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} xe^{-(1+i\omega)x}\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\right]_{x=0}^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{e^{-(1+i\omega)x}}{(1+i\omega)^2}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{(1+i\omega)^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Fouriertransformation) Gegeben sei die Fouriertransformation von $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformationen folgender Funktionen

5.1 $t^2e^{-t^2}$

5.2 $e^{4i-(t-2)^2}$

5.3 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}(t-\xi)^2}\mathrm{d}\xi$

Lösung: (.1)Wir berechnen

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{-t^2}) = -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2} = 4\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + t^2e^{-t^2}\right)$$

Damit folgt für unsere Funktion, dass

$$t^2e^{-t^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}(e^{-t^2}) + \frac{1}{2}e^{-t^2}$$

Um die Fouriertransformierte zu berechnen, benutzen wir die Regel für Ableitungen und die Linearität der Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}\{t^2e^{-t^2}\} = \frac{1}{4}\mathcal{F}\{\frac{d^2}{dt^2}(e^{-t^2})\}+\mathcal{F}\frac{1}{2}\{e^{-t^2}\} = -\frac{1}{4}\omega^2\mathcal{F}\{e^{-t^2}\}+\frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = (-\frac{1}{4}\omega^2+\frac{1}{2})\mathcal{F}\{e^{-t^2}\}$$

Wir müssen also nur noch die Fouriertransformierte von e^{-t^2} bestimmen. Es gilt mit der Regel für Skalierung:

$$e^{-t^2} = f(\sqrt{2}t) \Rightarrow \mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = \mathcal{F}\{f(\sqrt{2}t)\} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\omega^2},$$

wobei wir die bekannte Fouriertransformation von $f(t)$ benutzt haben. Damit haben wir insgesamt:

$$\mathcal{F}\{t^2e^{-t^2}\} = (-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2})\mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = \sqrt{\pi}(-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2})e^{-\frac{1}{4}\omega^2}.$$

Alternativer Lösungsweg: Wir benutzen die Regel für $t^n f(t)$.

$$\mathcal{F}\{t^2 e^{-t^2}\} \quad = \quad i^2 \frac{d^2}{d\omega^2}\mathcal{F}\{e^{-t^2}\}(\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2}\sqrt{\pi}(e^{-\frac{1}{4}\omega^4}) = \sqrt{\pi}(-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2})e^{-\frac{1}{4}\omega^2}.$$

(.2) Es gilt

$$e^{4i-(t-2)^2} = e^{4i}e^{-(t-2)^2} = e^{4i}f(\sqrt{2}(t-2))$$

Wir benutzen die Regeln für Skalierung und Verschiebung und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t-2)\} &= e^{-i\omega 2}\mathcal{F}\{f(t)\} = e^{-i\omega 2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \\
\mathcal{F}\{f(\sqrt{2}(t-2))\} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}\{f(t-2)\}(\frac{\omega}{\sqrt{2}}) = \sqrt{\pi}e^{-i\omega\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}\omega^2} \\
\mathcal{F}\{e^{4i}f(\sqrt{2}(t-2))\} &= e^{4i}\mathcal{F}\{f(\sqrt{2}(t-2))\} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\omega^2 - i\omega\sqrt{2}+4i}
\end{aligned}$$

(.3)

Wir sehen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(t-\xi)^2}\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi = (f*f)(t).$$

Mit der Regeln für Faltungen erhalten wir:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(t-\xi)^2}\mathrm{d}\xi\right\} = \mathcal{F}\{(f*f)(t)\} = \mathcal{F}\{(f)(t)\}^2 = 2\pi e^{-t^2}$$

Aufgabe 6 (Faltung) Es sei $f(t) = e^{-|t|}$.

6.1 Man berechne die Faltung $(f*f)(t)$. *(Tipp: Fallunterscheidung $t \geq 0$ und $t < 0$.)*

6.2 Man berechne die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$.

6.3 Unter Zuhilfenahme der Faltung bestimme man $\mathcal{F}(|t|e^{-|t|})(\omega)$.

Lösung: (.1) Um die Faltung $f*f$ mit $f(t) = e^{-|t|}$ zu erhalten, ist das folgende Integral zu bestimmen:

$$(f*f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}e^{-|\tau|}\mathrm{d}\tau\,.$$

Wir lösen die Beträge durch eine Fallunterscheidung auf:

(i) Fall $t \geq 0$. In diesem Fall gilt $t-\tau \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}
(f*f)(t) &= \int_t^{\infty} e^{t-2\tau}\mathrm{d}\tau + \int_0^t e^{-t}\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-t+2\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= e^t\left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_t^{\infty} + te^{-t} + e^{-t}\left[\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_{-\infty}^0 \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} = e^{-t}(1+t)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Fall $t < 0$. In diesem Fall gilt $t - \tau \geq 0 \Leftrightarrow 0 > t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_0^\infty e^{t-2\tau} \mathrm{d}\tau + \int_t^0 e^t \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^t e^{-t+2\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= e^t \left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_0^\infty + 0 - te^t + e^{-t}\left[\frac{1}{2}e^{2\tau}\right]_{-\infty}^t \\ &= \frac{1}{2}e^t - te^t + \frac{1}{2}e^t = e^t(1-t)\,.\end{aligned}$$

Wir können (i) und (ii) zusammenfassen und erhalten für die Faltung:

$$(f * f)(t) = (1 + |t|)e^{-|t|}\,.$$

(.2) Um die Fouriertransformierte von $f(t) = e^{-|t|}$ zu bestimmen, lösen wir den Betrag im zu berechnenden Integral auf:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-|t|}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)}\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{t(-1-i\omega)}\mathrm{d}t \\ &= (1-i\omega)^{-1} + (1+i\omega)^{-1} = \frac{2}{1+\omega^2}\,.\end{aligned}$$

(.3) Um nun die Fouriertransformierte von $g(t) = |t|\, e^{-|t|}$ zu bestimmen, nutzen wir (.1) und (.2) aus, es gilt nämlich

$$g(t) = |t|\, e^{-|t|} = (1 + |t|)\, e^{-|t|} - e^{-|t|} = (f * f)(t) - f(t)\,.$$

Wegen der Linearität der Fouriertransformation erhalten wir hieraus:

$$\mathcal{F}(|t|\, e^{-|t|})(\omega) = \mathcal{F}\left((f*f)(t) - f(t)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left((f*f)(t)\right)(\omega) - \mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega)\,.$$

Mithilfe des Faltungssatzes $(f * g)(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad F(\omega)\, G(\omega)$ erhalten wir nun

$$\mathcal{F}\left((f*f)(t)\right)(\omega) = \left(\mathcal{F}(f(t))(\omega)\right)^2 = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Schließlich erhalten wir ganz einfach die gesuchte Fourierkorrespondenz:

$$g(t) = |t|e^{-|t|} \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad \frac{4}{(1+\omega^2)^2} - \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Aufgabe 7 (Fouriertransformation) Für $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \ t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & , \ t > 0 \end{cases}$.

7.1 Man berechne die Fouriertransformierte von $f(t)$.

7.2 Wie lauten die Fouriertransformierten der *gedämpften Schwingungen*

$$x(t) = e^{-\lambda t}\cos Nt \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-\lambda t}\sin Nt\ ,\ N \in \mathbb{N}\ ,\ t > 0?$$

Lösung: (.1) Die Fouriertransformation F von f erhalten wir durch Berechnen des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{(-\lambda+ia)t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{(-\lambda+i(a-\omega))t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{-\lambda+i(a-\omega)}e^{-(\lambda-i(a-\omega))t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda+i(\omega-a)}\ . \end{aligned}$$

(.2) Wir nutzen die folgenden bekannten Formeln für den Kosinus und Sinus:

$$\cos(Nt) = \frac{1}{2}\left(e^{iNt}+e^{-iNt}\right) \quad \text{und} \quad \sin(Nt) = \frac{1}{2i}\left(e^{iNt}-e^{-iNt}\right)\ .$$

Wegen $t > 0$ und dem Teil (a) erhalten wir nun als Fouriertransformierte $X(\omega)$ für $x(t)$:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,\frac{1}{2}\,\left(e^{iNt}+e^{-iNt}\right)\,e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{\lambda+i(\omega-N)}+\frac{1}{\lambda+i(\omega+N)}\right) = \frac{\lambda+i\omega}{(\lambda+i\omega)^2+N^2} \end{aligned}$$

und analog als Fouriertransformierte $Y(\omega)$ für $y(t)$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,\frac{1}{2i}\,\left(e^{iNt}+e^{-iNt}\right)\,e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\,\left(\frac{1}{\lambda+i(\omega-N)}-\frac{1}{\lambda+i(\omega+N)}\right) = \frac{N}{(\lambda+i\omega)^2+N^2}\ . \end{aligned}$$

Für $\lambda \to 0^+$ wird $X(\omega), Y(\omega)$ immer *schmalbandiger* ($\to$ geringe Dämpfung). Im Grenzfall $\lambda = 0$ haben $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ zwei Pole bei $\pm N$.

Aufgabe 8 (Fouriertransformation) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-|t|) & ,\quad |t| \le 1 \\ 0 & ,\quad |t| > 1 \end{cases}$$

und bestätigen Sie mithilfe der Rücktransformation $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi$.

Lösung: Wir erhalten die Fouriertransformierte F von f durch Bestimmen des folgenden Integrals

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\frac{1}{2}(1-|t|)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-i\omega t}(1+t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-i\omega t}(1-t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{-i\omega}+\frac{t}{-i\omega}-\frac{1}{(-i\omega)^2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{-i\omega}-\frac{t}{-i\omega}+\frac{1}{(-i\omega)^2}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{\omega^2}\left(1-\frac{1}{2}\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)\right) = \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})}\right)^2 ,
\end{aligned}$$

wobei wir zuerst $\omega = 0$ wegen der Division durch ω ausschließen müssen und schließlich $\omega = 0$ wieder gewinnen, indem wir F in null durch $F(0) = \frac{1}{2}$ stetig fortsetzen.

Die inverse Fouriertransformation besagt schließlich, dass für alle t gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(\omega)\mathrm{d}\omega \,.$$

Wir setzen $t = 0$ und führen die Substitution $x = \frac{\omega}{2}$ bei dem entstehenden Integral durch:

$$\frac{1}{2} = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{(\frac{\omega}{2})}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \,.$$

Hieraus erhalten wir schließlich die interessante Aussage:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \,.$$