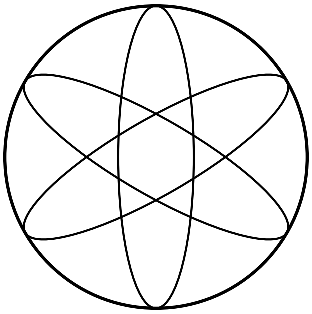
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Übung: Fouriertransformation

Autor: Benjamin Rüth, Korbinian Singhammer
Stand: 12. März 2015

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die cos-sin-Darstellungen der Fourierreihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

1.1 $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi)$,

1.2 $f(x) = (x-\pi)^2$ für $x \in [0, 2\pi)$,

1.3 $f(x) = |\sin x|$ für $x \in [-\pi, \pi)$,

1.4 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

Aufgabe 2 Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \pi - |x| \qquad \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi \; .$$

2.1 Man berechne die Koeffizienten der zugehörigen cos-sin-Darstellung $S(f)(x)$.

2.2 Man bestimme mit Hilfe von Teilaufgabe (a) den Wert der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Aufgabe 3 (Faltung,schwer!) Es sei s mit $s(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $x \in [0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Sägezahnfunktion.

3.1 Zeigen Sie, dass die Faltung $(s * s)(x)$ wieder eine 2π-periodische Funktion ergibt.

3.2 Berechnen Sie die periodische Faltung $(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$ direkt.

3.3 Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der Funktion $s*s$ durch direkte Rechnung.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Fouriertranformation von

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{0.1}$$

Aufgabe 5 (Fouriertransformation) Gegeben sei die Fouriertransformation von $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformationen folgender Funktionen

5.1 $t^2 e^{-t^2}$

5.2 $e^{4i-(t-2)^2}$

5.3 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{2}(t-\xi)^2} \mathrm{d}\xi$

Aufgabe 6 (Faltung) Es sei $f(t) = e^{-|t|}$.

6.1 Man berechne die Faltung $(f * f)(t)$. *(Tipp: Fallunterscheidung $t \geq 0$ und $t < 0$.)*

6.2 Man berechne die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$.

6.3 Unter Zuhilfenahme der Faltung bestimme man $\mathcal{F}(|t|e^{-|t|})(\omega)$.

Aufgabe 7 (Fouriertransformation) Für $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ \exp((-\lambda + ia)t) & , \quad t > 0 \end{cases}$.

7.1 Man berechne die Fouriertransformierte von $f(t)$.

7.2 Wie lauten die Fouriertransformierten der *gedämpften Schwingungen*

$$x(t) = e^{-\lambda t} \cos Nt \quad \text{und} \quad y(t) = e^{-\lambda t} \sin Nt \ , \ N \in \mathbb{N} \, , \ t > 0?$$

Aufgabe 8 (Fouriertransformation) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - |t|) & , \quad |t| \leq 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

und bestätigen Sie mithilfe der Rücktransformation $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$.