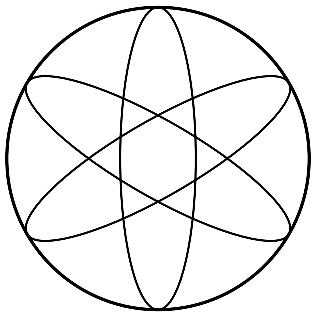
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Übung: Integralsätze und Funktionentheorie

Autor: Benjamin Rüth, Korbinian Singhammer

Stand: 9. März 2015

Aufgabe 1 (Torus) Zu festem $R > 0$ werden mittels

$$T : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi \\ \varrho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

1.1 den Oberflächeninhalt des Torus $T_R^r := T([0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ mit $r \in [0, R]$,

1.2 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r direkt,

1.3 den Fluß des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = x$, durch die Oberfläche von T_R^r mit Hilfe des **Satzes von Gauß**.

Aufgabe 2 (Gauss) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\sigma \,,$$

wobei W der Einheitswürfel mit den Ecken in $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ und $(1, 1, 1)$.

Aufgabe 3 (Gauß) Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion $u(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}$:

$$\iint_B \Delta u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \,\mathrm{d}s \,,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

Aufgabe 4 (Gauss) Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_\phi \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche $z = 4 - y^2$ und die drei Ebenen $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ begrenzt ist.

Aufgabe 5 (Satz von Stokes) Verifizieren Sie den **Satz von Stokes** für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$ auf dem Stück des Kegelmantels $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, das zwischen den Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = 1$ liegt. Worauf ist bei der Parametrisierung der Randkurve des Kegelmantelstücks zu achten?

Aufgabe 6 (Satz von Stokes) Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_\phi \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s = \oint_{\partial\phi} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Fläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit negativer z-Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene $z = 2$ mit dem Rand $\partial\phi$ begrenzt ist.

Aufgabe 7 (Rechnen) Man berechne:

7.1

$$e^{2+\frac{i\pi}{6}}$$

7.2

$$\cosh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

7.3

$$\sinh(it)\, t \in \mathbb{R}$$

7.4

$$\cos(1 + 2i)$$

7.5

$$\Re(z) \text{ ohne Verwendung von } \Re(\ )$$

7.6

$$\Im(z) \text{ ohne Verwendung von } \Im(\ )$$

Aufgabe 8 (Holomorphe Funktionen) Gegeben sind die Funktionen

$$f(z) = \bar{z} \text{ und } g(z) = z^2$$

Diese beiden Funktionen sind auf Holomorphie zu untersuchen. Geben Sie ferner jeweils ein passendes Wegintegral (mit Parametrisierung des verwendeten Weges!) welches die Holomorphie der Funktion belegt oder widerlegt. Kann man für holomorphe Funktionen zeigen, dass das Wegintegral für **alle** geschlossenen Wege verschwindet?

Aufgabe 9 (Holomorphe Funktionen) Stellen Sie fest, in welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen holomorph sind:

9.1

$$f(z) = z^3$$

9.2

$$f(z) = z\Re(z)$$

9.3

$$f(z) = |z|^2$$

9.4

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Aufgabe 10 (Integral) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma 2ze^{z^2}\,dz$$

für den Weg, welcher 0 und $1+i$ entlang der Parabel $y = x^2$ verbindet.

Aufgabe 11 (Integral) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

11.1

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz$$

11.2

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(2i-z)(z-i/2)}$$