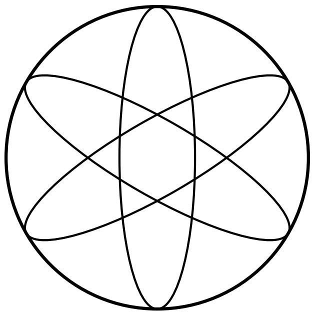
Ferienkurs
Analysis 3 für Physiker



Integration im $\mathbb{R}^n$

Autor: Benjamin Rüth

Stand: 8. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Definition des Riemann-Integrals über Quadern

Ein Quader ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ der folgenden Form:

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

Über einen solchen Quader können wir eine stetige Funktion $f(x)$ integrieren

$$\int\limits_Q f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} ... \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x_n ... \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1$$

Wir können außerdem Quadern Q im $\mathbb{R}^n$ ein Volumen $\mathrm{vol}_n(Q)$ zuordnen, indem wir über $f(x) = 1$ integrieren.

$$\mathrm{vol}_n(Q) = \int\limits_Q 1\mathrm{d}x$$

1.1 Beispiel:Volumen verschiedener Quader

Wir betrachten verschiedene Quader:

$$\begin{aligned} Q_1 &= [0, l] \times [0, b] \times [0, h] \in \mathbb{R}^3 \\ Q_2 &= [0, l] \times [0, b] \times \{0\} \in \mathbb{R}^3 \\ Q_3 &= [0, l] \times [0, b] \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Volumina der Quader:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(Q_1) &= \int\limits_{Q_1} 1\mathrm{d}x^3 = \int\limits_0^l \int\limits_0^b \int\limits_0^h 1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = l\ b\ h \\ \mathrm{vol}_3(Q_2) &= \int\limits_{Q_2} 1\mathrm{d}x^3 = \int\limits_0^l \int\limits_0^b \int\limits_0^0 1\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = 0 \\ \mathrm{vol}_2(Q_3) &= \int\limits_{Q_3} 1\mathrm{d}x^3 = \int\limits_0^l \int\limits_0^b 1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = l\ b \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die rechteckige Fläche, die von Q_2 beschrieben wird - logischerweise - kein 3 dimensionales Volumen besitzt.

2 Integration über Normalbereiche

Wir können auch über kompliziertere Mengen integrieren, deren Integrationsgrenzen voneinander abhängen. Wir nennen solche Mengen Normalbereiche. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Normalbereich, wenn sie wie folgt konstruiert ist:

$$\begin{aligned} A_1 &= [a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R} \\ A_k &= \{(x,y) \in A_{k-1} \times \mathbb{R} \mid a_k(x) \leq y \leq b_k(x)\} \subseteq \mathbb{R}^k \text{ mit } a_k, b_k \in C(A_{k-1}) \\ A &= A_n. \end{aligned}$$

Die Integration ist dann für 2D bzw. 3D folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y) dy dx &= \int_{x=a_1}^{b_1} \int_{a_2(x)}^{b_2(x)} f(x,y) dy dx \quad \text{bzw.} \\ \iiint_A f(x,y,z) dz dy dx &= \int_{x=a_1}^{b_1} \int_{a_2(x)}^{b_2(x)} \int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx. \end{aligned}$$

2.1 Beispiel: Fläche eines Kreises

Wir wollen in diesem Beispiel die Fläche der Kreisscheibe mit Radius r ($S_2(r)$) berechnen.

$$\text{vol}_2(S_2(r)) = \int\limits_{S_2(r)} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Dafür definieren wir den entsprechenden Normalbereich:

$$A_1 = [-r, r] \tag{2.1}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in A_1 \times \mathbb{R} \mid -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\} \tag{2.2}$$

Für die Fläche folgt nun:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(S_2(r)) &= \int\limits_{S_2(r)} 1 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} 1 \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \mathrm{d}x = 2 \frac{1}{2} \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \right]_{-r}^{r} \\ &= (0 + r^2 \frac{\pi}{2}) - (0 - r^2 \frac{\pi}{2}) = r^2 \pi \end{aligned}$$

3 Weitere Eigenschaften des Riemann-Integrals

Um Probleme auf komplexeren Integrationsbereichen zu lösen, oder die Integration selbst zu vereinfachen erweisen sich diese Eigenschaften des Riemann-Integrals oft als nützlich:

Linearität:

$$\begin{aligned} \int_M \alpha f(x)\, \mathrm{d}^n x &= \alpha \int_M f(x)\, \mathrm{d}^n x \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \\ \int_M [f(x) + g(x)]\, \mathrm{d}^n x &= \int_M f(x)\, \mathrm{d}^n x + \int_M g(x)\, \mathrm{d}^n x \end{aligned}$$

Additivität:

$$M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n,\ M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(x)\, \mathrm{d}^n x = \int_{M_1} f(x)\, d^n x + \int_{M_2} f(x)\, \mathrm{d}^n x$$

4 Transformationssatz

Der Transformationssatz ist die Verallgemeinerung der Substitution ins Mehrdimensionale. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Funktion, durch die die Koordinaten x und u über die Gleichung $x = \Phi(u)$ zusammenhängen.

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ x_2 &= \Phi_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \Phi_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{aligned}$$

Der Transformationssatz besagt:

$$\int\limits_M f(x)\, \mathrm{d}^n x = \int\limits_{\Phi^{-1}(M)} f(\Phi(u)) |\det J\Phi(u)|\, \mathrm{d}^n u$$

4.1 Beispiel: Kugelkoordinaten

Bei Kugelkoordinaten sieht die Funktion $\Phi : (r, \phi, \theta) \to (x, y, z)$ so aus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\mathrm{J}\Phi(r, \phi, \theta)\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = r^2\sin(\theta)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\phi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} (f \circ \Phi)(r, \phi, \theta)\ \ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

5 Gramsche Determinante

Eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt kein Volumen. Jedoch kann man ihr ein m-dimensionales Volumen zuweisen. Beispielsweise besitzt die Oberfläche einer Kugel kein Volumen, sondern eine Fläche.

Um dieses Volumen zu berechnen benötigen wir die sog. Gramsche Determinante. Diese ist wie folgt definiert:

Sei eine Untermannigfaltigkeit parametrisiert durch $\gamma(x)$ so nennt man $G = \gamma'(x)^T\gamma'(x)$ den metrischen Tensor und $g = \det(G)$ die Gramsche Determinante.

Mit diesem Hilfsmittel kann man nun einer durch $\gamma : V \to M$ parametrisierten m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M ein m-dimensionales Volumen zuordnen.

$$\mathrm{vol}_m(M) = \int\limits_M dS = \int\limits_V \sqrt{\det\left(\gamma(x)'^T\gamma(x)'\right)}dx$$

5.1 Beispiel: Oberfläche der Einheitskugel

Wir verwenden die Parametrisierung der Einheitskugel aus dem vorherigen Beispiel:

$$\gamma(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Um die Oberfläche der Einheitssphäre (S_2) zu bestimmen benötigen wir zuerst die Jacobimatrix der Parametrisierung.

$$J_{\gamma(\phi,\theta)} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} = \gamma(\phi,\theta)'$$

Daraus folgt nach ein paar Umformungen:

$$\gamma(\phi,\theta)'^T \gamma(\phi,\theta)' = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für das Volumen folgt also:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(S_2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\det(\gamma(\phi,\theta)'^T \gamma(\phi,\theta)')} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin(\theta)^2} d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

6 Oberflächenintegrale im 3-Dimensionalen

Haben wir eine Oberfläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben, können wir über diese auch auf eine andere Weise integrieren. Sei eine Parametrisierung einer Oberfläche gegeben durch:

$$\phi : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Die partiellen Ableitungen $\phi_u(u,v)$ und $\phi_v(u,v)$ spannen denn Tangentialraum auf, der Normalenenvektor ergibt sich durch $\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)$. Wir unterscheiden nun zwei Arten von Integralen:
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\phi(B) \subseteq D$ ein Skalarfeld. Man nennt

$$\iint_\phi f dS = \iint_B f(\phi(u,v)) \|\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)\| dudv$$

skalares Flächenintegral.
Sei andererseits $\vec{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(B) \subseteq D$ ein Vektorfeld. Man nennt

$$\iint_\phi \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_B \vec{v}(\phi(u,v)) \cdot (\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)) dudv$$

vektorielles Flächenintegral oder Flussintegral. In manchen Fällen kann es geschickter sein, das Flussintegral durch $\iint_\phi \vec{v} \cdot \vec{n}\ dS$ zu bestimmen, wobei $\vec{n}$ der Einheitsnormalenvektor ist. Es sei noch zu erwähnen, dass das Flussintegral von der Richtung des Normalenvektors abhängt. Die übliche Konvention ist, dass man den nach außen gerichteten Normalenvektor hernimmt.

6.1 Beispiel: Oberfläche als Nullstellenmenge

Wir nehmen an, dass eine Oberfläche Ω gegeben ist durch $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = z\}$, wobei $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig-differenzierbare Funktion ist. Wir können die Fläche parametrisieren durch:

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Außerdem haben wir:

$$\phi_x(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix}, \quad \phi_y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}, \quad \phi_x \times \phi_y(x, y) = \begin{pmatrix} -f_x(x, y) \\ -f_y(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die Oberfläche:

$$\begin{aligned} \iint_\Omega 1 dS &= \iint_B \|\phi_x(x, y) \times \phi_v(x, y)\| dx dy \\ &= \iint_B \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$