# Probeklausur zum Ferienkurs Analysis1

## Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

1. [**Vollständige Induktion**] Man zeige:

$$n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}, \quad n \geq 3 \tag{1}$$

**Lösung:**

*Induktionsanfang:* $n = 3$: $3\sqrt{3} > 5 > 3 + \sqrt{3}$

*Induktionsvoraussetzung:* $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}, \quad n \geq 3$

*Induktionsschritt:* $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)\sqrt{n} = n\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} &> n\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ &\overset{\text{I.V.}}{>} n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} > (n+1) + \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

2. [**Komplexe Zahlen**] Man betrachte die komplexe Zahl

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}nx}{1 - \mathrm{i}nx}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

und bestimme die Phase sowie die Polardarstellung. Schließlich berechne man noch $\lim\limits_{n\to\infty} z$.

**Lösung:**

Man kann Zähler und Nenner in Polarform schreiben mit jeweils der Phase $\varphi_{1,2} = \pm\varphi = \pm\arctan(nx)$ und $r = \sqrt{1 + (nx)^2}$. Damit gilt:

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}nx}{1 - \mathrm{i}nx} = \frac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \mathrm{e}^{2i\varphi} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\arctan(nx)}$$

Damit ergibt sich die Phase zu $\phi = 2\arctan(nx)$. Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} z = \begin{cases} 1, & \text{für } x = 0 \\ -1, & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan(nx) = \pm\frac{\pi}{2}$.

3. [**Potenzreihen**] Der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{27^{k+2}}{8^k} x^{3k} \tag{3}$$

beträgt

$\square\ 0 \quad \square\ \frac{27}{8} \quad \square\ \frac{1}{3} \quad \square\ \frac{3}{2} \quad \boxtimes\ \frac{2}{3} \quad \square\ \infty \quad \square\ \frac{8}{27}$

**Lösung:**

Wir betrachten zuerst $x^{3k} = x^n$. Mit dem Wurzelkriterium folgt

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{27^n 27^2}{8^n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{27}{8} 27^{\frac{2}{n}} \to \frac{27}{8}$$

Da wir jedoch eine Funktion in $x^3$ haben beträgt der Konvergenzradius

$$|x^3| < \rho \;\Leftrightarrow\; |x| \leq \sqrt[3]{\rho} = \frac{2}{3}$$

4. **[Folgen und Reihen]**

i) Welche Häufungspunkte weist die Folge

$$a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4}$$

auf?

**Lösung:**

Die Folge liefert periodisch $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$, also sind das die einzigen 4 Häufungspunkte.

ii) Die Folge

$$b_n = \frac{(-\mathrm{i})^n \cos n}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

ist

$\square$ divergent $\boxtimes$ konvergent $\boxtimes$ Cauchy-Folge $\boxtimes$ Nullfolge $\square$ bestimmt divergent

**Lösung:**

Es gelten die Abschätzungen:

$$0 \leq \left|\frac{(-\mathrm{i})^n \cos n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Nach dem Einschließungskriterium ist die Folge also Nullfolge und damit natürlich konvergent. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, folgt damit, dass $b_n$ eine Cauchy-Folge sein muss.

iii) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n \cos n}{n^3} \tag{6}$$

ist

☐ divergent ☒ konvergent ☒ absolut konvergent ☐ nicht defniert

**Lösung:**

Laut Vorlesung sind Reihen der Art

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

absolut konvergent für $s > 1$, also folgen alle Aussagen aus dem Majorantenkriterium mit $1/n^3$ (vgl. ii))

5. **[Taylorrreihen]** Man entwickle

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{7}$$

in eine Taylor-Reihe um $x_0 = 1$ und zeige, dass $T_4(x) - f(x) = \mathrm{o}\left((x-1)^4\right)$.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k \\ &= 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\mathcal{O}\left((x-1)^5\right) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left|\frac{T_4(x)-f(x)}{(x-1)^4}\right| &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{|x-1|^4} - \frac{1}{|x-1|^3} + \frac{1}{|x-1|^2}\right. \\ &\left.-\frac{1}{|x-1|} + 1 - \frac{1}{x|x-1|^5}\right) = 1 < \infty \;\Rightarrow\; T_4(x) - f(x) = \mathrm{o}\left((x-1)^4\right) \end{aligned}$$

6. **[Integration]** Ein häufig auftretendes Integral in der Elektrodynamik ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Man werte das Integral durch die Substitution $x = \tan(u)$ aus.

**Lösung:**

Aus der Substitution folgt:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\cos^2(u)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u$$

Damit lautet das Integral:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan^2(u))^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2(u))^{\frac{3}{2}}}{\left(\cos^2(u)+\sin^2(u)\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(u)}{(1)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \sin(u)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass $\arctan(u) \to \pm\pi/2$ für $u \to \pm\infty$.

7. **[Fourierreihen]** Man berechne die Fourierreihe für die periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi] \tag{9}$$

und zeige mithilfe der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_k|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \tag{10}$$

dass gilt

$$\zeta(2) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{11}$$

**Lösung:**

Da $f(-x) = -x$ ist die Fourierreihe auch ungerade, es kommen also keine Konstanten und sin-Terme vor. Mit der Berechnungsformel für $b_k$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k > 0$$

erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{ungerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{p.I.}}{=} \frac{2}{\pi}\left( x\frac{-\sin(kx)}{k}\bigg|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{-\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left( -\pi\frac{\cos(\pi k)}{k} + 0 + \frac{\sin(kx)}{k^2}\bigg|_{0}^{\pi} \right) \\
&= \frac{-2(-1)^k}{k} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Fourierreihe

$$
F_f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}
$$

Alternativ kann man auch die komplexen Koeffizienten berechnen:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,x\,\mathrm{d}x &= \frac{-x}{2\pi\mathrm{i}k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}k}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} + \mathrm{e}^{ik\pi}\right) = -\frac{\cos(k\pi)}{\mathrm{i}k} = \frac{(-1)^{k+1}}{\mathrm{i}k}
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Fourierreihe

$$
\begin{aligned}
F_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}/\{0\}} (-1)^{k+1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\mathrm{i}k} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{-ikx}\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}
\end{aligned}
$$

Wir berechnen

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3} \tag{12}
$$

und

$$
\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}
$$

Wir wenden die Formel aus der Angabe an:

$$
\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}
$$

8. **[DGL]** Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{v} = 1 - v^2.$$

Man bestimme $v(t)$ auf dem Intervall $v \in [0, 1)$ mit $v(0) = 0$ sowie die Asymptotik $t \to \infty$. Skizzieren Sie $v(t)$.

**Lösung:**

Durch Trennung der Variablen erhält man:

$$\frac{1}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}\int_0^v \left(\frac{1}{1 - v'} + \frac{1}{1 + v'}\right)\mathrm{d}v' = \frac{1}{2}(\ln|1 + v'| - \ln|1 - v'|)\Big|_0^v \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1 + v}{1 - v}\right| - \ln\left|\frac{1}{1}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + v}{1 - v}\right| \end{aligned}$$

Wir lösen nach $v$ auf, wobei zu beachten ist, dass $|1 - v| = 1 - v$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2t} = \frac{1 + v}{1 - v} \quad \Leftrightarrow \quad v &= \frac{\mathrm{e}^{2t} - 1}{\mathrm{e}^{2t} + 1} = \frac{1/2 \cdot (\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})}{1/2 \cdot (\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t})} \\ &= \frac{\sinh t}{\cosh t} = \tanh t \quad \xrightarrow{t \to \infty} \quad 1 \end{aligned}$$

Kennt man die Asymptotik von tanh nicht, so kann man alternativ rechnen:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{2t} - 1}{\mathrm{e}^{2t} + 1} = \lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2t}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} = 1$$