Probeklausur zum Ferienkurs Analysis 1

Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

Wichtig: Die Probeklausur zum Ferienkurs Analysis 1 WS2014/15 findet von **9:00-10:30** im MI-HS 3 statt. Im Anschluss an die Klausur wird diese von den Tutoren besprochen.

1. [**Vollständige Induktion**] Man zeige:

$$n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}, \quad n \geq 3 \tag{1}$$

2. [**Komplexe Zahlen**] Man betrachte die komplexe Zahl

$$z = \frac{1 + \mathrm{i}nx}{1 - \mathrm{i}nx}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

und bestimme die Phase sowie die Polardarstellung. Schließlich berechne man noch $\lim\limits_{n\to\infty} z$.

3. [**Potenzreihen**] Der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{27^{k+2}}{8^k} x^{3k} \tag{3}$$

beträgt

$\square\ 0 \quad \square\ \frac{27}{8} \quad \square\ \frac{1}{3} \quad \square\ \frac{3}{2} \quad \square\ \frac{2}{3} \quad \square\ \infty \quad \square\ \frac{8}{27}$

4. [**Folgen und Reihen**]

i) Welche Häufungspunkte weist die Folge

$$a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4}$$

auf?

ii) Die Folge

$$b_n = \frac{(-\mathrm{i})^n \cos n}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

ist

□ divergent □ konvergent □ Cauchy-Folge □ Nullfolge □ bestimmt divergent

iii) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i})^n \cos n}{n^3} \tag{6}$$

ist

□ divergent □ konvergent □ absolut konvergent □ nicht defniert

5. **[Taylorrreihen]** Man entwickle

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{7}$$

in eine Taylor-Reihe um $x_0 = 1$ und zeige, dass $T_4(x) - f(x) = \mathrm{o}\left((x-1)^4\right)$.

6. **[Integration]** Ein häufig auftretendes Integral in der Elektrodynamik ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x. \tag{8}$$

Man werte das Integral durch die Substitution $x = \tan(u)$ aus.

7. **[Fourierreihen]** Man berechne die Fourierreihe für die periodische Fortsetzung von

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi] \tag{9}$$

und zeige mithilfe der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \tag{10}$$

dass gilt

$$\zeta(2) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{11}$$

8. **[DGL]** Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{v} = 1 - v^2.$$

Man bestimme $v(t)$ auf dem Intervall $v \in [0, 1)$ sowie die Asymptotik $t \to \infty$. Skizzieren Sie $v(t)$.