Lösungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 4
Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner, Thomas Baldauf

VIII Taylorreihen

```
Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen zum jeweiligen
Entwicklungspunkt a. Geben Sie die Konvergenzradien R ≥ 0 an und
untersuchen Sie, für welche x ∈ (a − R, a + R) eine Übereinstimmung
zwischen Funktion und Taylorreihe vorliegt.
```

1. $f(x) = -\dfrac{3}{(2+3x)^2}, a = 2$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^3}, & x = 0 \\ -1/6, & x \neq 0 \end{cases}, a = 0$
3. $\operatorname{arctanh}(x), a = 0$ *Hinweis: betrachten Sie zunächst die Ableitung* $\operatorname{arctanh}'(x)$
4. $\dfrac{\sin(x)}{2+x}$, $a = 0$ bis einschließlich des Gliedes 5.Ordnung
5. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}, a = 2$ bis einschließlich des Gliedes 3.Ordnung

---

1. $f(x) = \frac{-3}{(2+3x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+3x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8+3\cdot(x-2)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8\cdot(1-(-3)\cdot\frac{1}{8}\cdot(x-2)}\right)$
   $= \frac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{8^{n+1}}(x-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{8^{n+}}n(x-2)^{n-1}$
   $= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)3^{n+1}}{8^{n+2}}(x-2)^n$
   Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{3}{8}\right| = \frac{3}{8}$. Somit konvergiert die Reihe, falls $|x-2| < \frac{8}{3}$. Die Potenzreihenentwicklung ist gleich der Taylorreihe $T(x)$.

2. Wir benutzen die bekannte Reihendarstellung $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   Damit berechnen wir $\frac{\sin(x)-x}{x^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} =: T(x)$.
   Da $T(0) = \frac{-1}{6}$, ist also $T(x)$ eine Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ und somit auch gleich der Taylorreihe.

3. Wir berechnen wie empfohlen die Ableitung: $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctanh}(x)) = \frac{1}{1-x^2}$ und erkennen die geometrische Reihe:
   $\Rightarrow \operatorname{arctanh}'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}x^{2k} \Rightarrow \operatorname{arctanh}(x) = \int dx\sum\limits_{k=0}^{\infty}(x^2k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. Hierbei wurde $n := 2k+1$ definiert (für n gerade setzen wir 0). Den Konvergenzradius

bestimmen wir mithilfe des Quotientenkriteriums:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

Die Reihe konvergiert also für $x \in (1,1)$.

4. Mit $g(x) = sin(x)$ (Taylorentwicklung bekannt) und mit
$h(x) = \frac{1}{2+x} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n$
ergibt sich die Taylor-Entwicklung unserer Funktion durch das Cauchy-Produkt der Einzelterme: $T(x) = g(x)h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n = \sum_{k+l=n}^{\infty} a_k b_l$
Mit $a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$ und $b_l = \begin{cases} 0 & \text{für l gerade} \\ (-1)^{(l-1)/2} \cdot \frac{1}{l!} & \text{für l unerade} \end{cases}$
So erhalten wir für die ersten fünf Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_0 b_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 &= a_1 b_1 = -\frac{1}{4} \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_2 b_1 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \\ c_4 &= a_1 b_3 + a_3 b_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{48} \\ c_5 &= a_0 b_5 + a_2 b_3 + a_4 b_1 = \frac{1}{240} - \frac{1}{48} + \frac{1}{32} = \frac{7}{480}. \end{aligned}$$

Die ersten fünf Glieder der Taylorreihe der Funktion f lauten also aufgeschrieben:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{48} + \frac{7x^5}{480} + R_6(x)$$

Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium für $|x| < 2$.

5. Wir erhalten für die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln(x)}{x(\ln(x))^3} \end{aligned}$$

Und entsprechend für die Taylorreihe

$$f(x) = \frac{2}{\ln(2)} + \frac{\ln(2) - 1}{(\ln(2))^2}(x-2) + \frac{2 - \ln(2)}{2(\ln(2))^3}(x-2)^2 + \mathcal{O}((x-2)^3)$$

Wegen der Reihenentwicklung des ln konvergiert die Reihe für $|x - 1| < 1 \Rightarrow x \in (0, 2)$. Der Konvergenzradius ist 2.

IX Kurvendiskussion

Berechen Sie die Definitions- und Wertebereiche, die Extrema und die zweiten Ableitungen folgender Funktionen ($x \in \mathbb{R}$):

1. $f(x) = \exp(\sin(x))$
2. $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$
3. $h(x) = \dfrac{((\ln(3x))^2}{x}$

1. $x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-\frac{1}{e}, e]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{\sin(x)}\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ mit } n \in \mathbb{N} & \text{für Maximum} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0 & \text{für Minimum} \end{cases} \\ f''(x) &= \mathrm{e}^{\sin(x)}\cos^2(x) - \mathrm{e}^{\sin(x)}\sin(x) \end{aligned}$$

2. $x \in [-1, \infty), f(x) \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)^2 + 2(x+1)(x-1)}{3\left((x-1)^2(x+1)\right)^{2/3}} = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{6},\ x_{max} = -\frac{1}{3},\ x_{min,1} = 1 \\ f''(x) &= \frac{4(x-1) + 2(x+1)}{3\left((x-1)^2(x+1)\right)^{2/3}} - \frac{2\left((x-1)^2 + 2(x+1)(x-1)\right)^2}{9\left((x-1)^2(x+1)\right)^{5/3}} \end{aligned}$$

Ein weiteres Minimum befindet sich bei $x_{min,2} = -1$

$$\begin{aligned} f(x_{max}) &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{2} \\ f(x_{min,1}) &= f(x_{min,2}) = 0 \end{aligned}$$

3. $x \in (0, \infty), f(x) \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\ln(3x) - \ln^2(3x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(3x) = 2 \Leftrightarrow x_{max} = \frac{\mathrm{e}^2}{3} \\ \ln(3x) = 0 \Leftrightarrow x_{min} = \frac{1}{3} \end{cases} \\ f''(x) &= \frac{2 + 2\left(\ln(3x)\right)^2 - 6(\ln(3x))}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_{max}) &= \frac{12}{\mathrm{e}^2} \\ f(x_{min}) &= 0 \end{aligned}$$

X Fourierreihen

Berechnen Sie die Fourierreihe von:

1. $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi)$
2. $f(x) = \sin(x)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
3. $f(x) = |\sin(x)|$ für $x \in [-\pi, \pi)$

1. Da die Funktion ungerade ist, erhalten wir für die Koeffizienten $a_n = 0$ und für b_n gilt:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}\right|\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi^4}\int_0^{\pi} x^3\sin(nx)dx - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi^4}\left[\frac{-1}{n}x^3\cos(nx) - \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(nx) + \frac{2x}{n\pi^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&+ \frac{6}{n\pi^4}\left[\frac{1}{n^3}\left(-2\sin(nx) + 2nx\cos(nx) + n^2x^2\sin(nx)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\left(\frac{-2x^3}{n\pi^4} + \frac{2x}{n\pi^2} + \frac{12\pi}{n^3\pi^4}\right)\cos(nx) + \left(\frac{-2}{n^2\pi^2} - \frac{12}{n^4\pi^4} + \frac{6x^2}{n^2\pi^4}\right)\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= (-1)^n\left(\frac{-2\pi^3}{n\pi^4} + \frac{2\pi}{n\pi^2} + \frac{12\pi}{n^3\pi^4}\right) = (-1)^n\frac{12}{n^3\pi^3}.
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Nun erhalten wir als Fourierreihe F zu f:

$$F_f(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}$$

2. durch direkte Umformung erhhalten wir die Fourierreihe zu:

$$\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Dabei wurde verwendet $\sin(x)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$ und

$$\sin(4x) = \sin(x)\left(8\cos^3(x) - 4\cos(x)\right)$$

3. Da f eine gerade Funktion ist, folgt $b_n = 0$. Für die Koeffizienten a_n gilt:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\cos(x)\cos(nx)|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n + 1 - n\left(\sin(x)\sin(nx)|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)dx\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}((-1)^n+1) + n^2 a_n.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhalten wir $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{((-1)^n+1)}{1-n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} \text{ falls n gerade} \\ 0 \text{ falls n ungerade} \end{cases}$ Damit lautet die Fourierreihe F von f:

$$
F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos(2kx)}{\pi[1-(2k)^2]} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)}
$$

XI Unendliche Reihe

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$
f(x) = \pi - |x| \quad \texttt{für} - \pi \le x \le \pi.
$$

1. Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der cos-sin-Darstellung von $F_f(x)$.
2. Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der vorherigen Teilaufgabe den Wert der unendlichen Reihe

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots
$$

1. Da f eine gerade Funktion ist, gilt für die Koeffizienten $b_n = 0$ und

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi - xdx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin(nx) - \frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} \text{ falls n ungerade} \\ 0 \text{ falls n gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hieraus erhalten wir die Fourierreihe F zu f:

$$F_f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

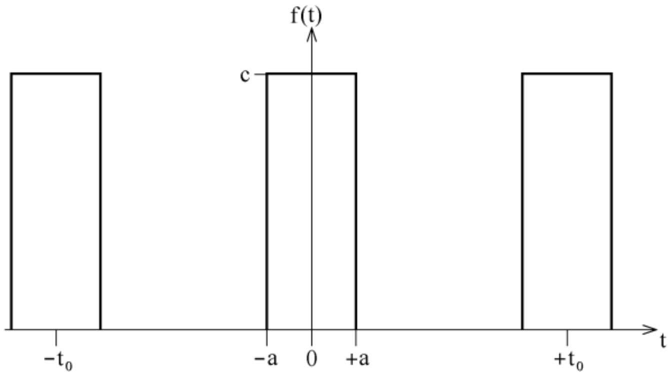
2. Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, gilt F(x) = f(x) für alle x. Damit gilt insbesondere

$$\pi = f(0) = F(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)$$

Hiermit erhalten wir $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

XII Rechtecksignal

`Entwickeln Sie folgende Funktion in eine komplexwertige Fourier-Reihe` $(t_0 = 2\pi)$



Wir betrachten eine Periode von $t = -\frac{t_0}{2}$ bis $t = \frac{t_0}{2}$ mit der Periodendauer $T = t_0$.
Die Funktion innerhalb einer Periode lautet

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\frac{t_0}{2} < t < -a \\ c & \text{für } -a < t < -a \\ 0 & \text{für } a < t < \frac{t_0}{2} \end{cases}$$

Wir berechnen den Fourierkoeffizienten c_0:

$$c_0 = \frac{1}{T}\cdot\int_T f(t)dt = \frac{1}{t_0}\cdot\int_{-a}^{a} cdt = \frac{1}{t_0}\left[ct\right]_{-a}^{a} = \frac{2ca}{t_0}$$

Die übrigen Koeffizienten werden bestimmt durch:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{t_0}\cdot\int_{-a}^{a} c\cdot e^{-in\omega_0 t}dt = \frac{1}{t_0}\cdot\frac{1}{-in\omega_0}\cdot\left[c\cdot e^{-in\omega_0 t}\right]_{-a}^{a}$$

Mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}$ folgt durch Einsetzen der Integralgrenzen

$$c_n = \frac{1}{t_0} \cdot \frac{1}{-in\omega_0} \left(c \cdot e^{-in\omega_0 a} - c \cdot e^{in\omega_0 a} \right) = \frac{1}{t_0} \cdot \frac{ic}{n\frac{2\pi}{t_0}} \cdot \left(e^{-in\frac{2\pi}{t_0}a} - e^{in\frac{2\pi}{t_0}a} \right) \cdot = \frac{ic}{2\pi n} \cdot \left(e^{-i2\pi n\frac{a}{t_0}} - e^{i2\pi n\frac{a}{t_0}} \right)$$

Damit lautet die komplexwertige Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ic}{2\pi n} \cdot \left(e^{-in\frac{2\pi}{t_0}a} - e^{in\frac{2\pi}{t_0}a} \right) \cdot e^{in\frac{2\pi}{t_0}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ic}{2\pi n} \cdot \left(e^{i2\pi n\frac{t-a}{t_0}} - e^{i2\pi n\frac{t+a}{t_0}} \right)$$

XIII Differentialgleichungen I

> Geben Sie alle Lösungen der folgenden DGLen und AWPs an:
>
> 1. $\dot{x}t = 2x$. Skizzieren Sie die Lösung!
> 2. $\dot{x} = \frac{2t}{t^2+1}x$
> 3. $x(1-t)\dot{x} = 1 - x^2$. Welche Form haben die Lösungen?
> 4. $t^2 x = (1+t)\dot{x}, \;\; x(0) = 1$

1.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{2dt}{t} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{2dt}{t} + c \Rightarrow \ln|x| = 2\ln|t| + c, c \in \mathbb{R} \\ x(t) &= \pm \mathrm{e}^c t^2, c \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = \tilde{c}t^2, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Lösung ist parabelförmig.

2.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{2tdt}{t^2+1} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{2tdt}{t^2+1} + c \Rightarrow \ln|x| = \ln(t^2+1) + c, c \in \mathbb{R} \\ x(t) &= \pm \mathrm{e}^c (t^2+1), c \in \mathbb{R} \\ x(t) &= c(t^2+1) = ct^2 + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{1-x^2}dx &= \frac{1}{1-t}dt \\
\int \frac{x}{1-x^2}dx &= \int \frac{1}{1-t}dt + c \Rightarrow \frac{-1}{2}\ln|1-x^2| - c = \ln|1-t|, c \in \mathbb{R} \\
\frac{(1-t)^2}{c} + x^2 &= 1 \quad \text{(Für } c > 0 \text{ Ellipsen, für } c < 0 \text{ Hyperbeln. } x = \pm 1 \text{ sind auch Lösungen)}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{t^2}{t+1}dt = \int (t-1) + \frac{1}{t+1}dt \Rightarrow \ln|x| = c + \frac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1| \\
\Rightarrow x(t) &= \mathrm{e}^c\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}t^2-t)}\,|t+1| = \tilde{c}\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}t^2-t)}\,|t+1| \\
x(0) &= 1 \Rightarrow \tilde{c}\,\mathrm{e}^0 \cdot 1 = \tilde{c} = 1 \\
\Rightarrow x(t) &= \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}t^2-t)}\,|t+1|
\end{aligned}
$$

XIV Differentialgleichungen II

Geben Sie die Lösungsbasis des folgenden DGL-Systems an:

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Das Charakteristische Polynom ist

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Lösungsbasis ist $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x,\ \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}$