Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 4
Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner, Thomas Baldauf

I Taylorreihen

Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen zum jeweiligen Entwicklungspunkt a. Geben Sie die Konvergenzradien $R \geq 0$ an und untersuchen Sie, für welche $x \in (a-R, a+R)$ eine Übereinstimmung zwischen Funktion und Taylorreihe vorliegt.

1. $f(x) = -\dfrac{3}{(2+3x)^2}, a = 2$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^3}, & x = 0 \\ -1/6, & x \neq 0 \end{cases}, a = 0$
3. $f(x) = \operatorname{arctanh}(x), a = 0$ *Hinweis: betrachten Sie zunächst die Ableitung* $\operatorname{arctanh}'(x)$
4. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2+x},\ a = 0$ bis einschließlich des Gliedes 5.Ordnung
5. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}, a = 2$ bis einschließlich des Gliedes 3.Ordnung.

II Kurvendiskussion

Berechen Sie die Definitions- und Wertebereiche, die Extrema und die zweiten Ableitungen folgender Funktionen ($x \in \mathbb{R}$):

1. $f(x) = \exp(\sin(x))$
2. $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$ (nur erste Ableitung)
3. $h(x) = \dfrac{((\ln(3x))^2}{x}$

III Fourierreihen

Berechnen Sie die Fourierreihe von:

1. $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi)$
2. $f(x) = \sin(x)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
3. $f(x) = |\sin(x)|$ für $x \in [-\pi, \pi)$

IV Unendliche Reihe

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

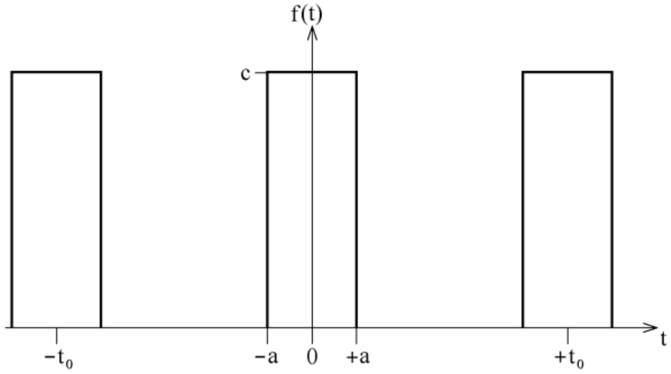
$$f(x) = \pi - |x| \quad \text{für} - \pi \leq x \leq \pi.$$

1. Berechnen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der cos-sin-Darstellung von $F_f(x)$.
2. Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme der vorherigen Teilaufgabe den Wert der unendlichen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

V Rechtecksignal

Entwickeln Sie folgende Funktion in eine komplexwertige Fourier-Reihe ($t_0 = 2\pi$)! Für welche Werte von t konvergiert die Fourier-Reihe gegen die Funktion ($f(t)$ „springt“ bei $t = -a$ und $t = a$ jeweils von 0 auf c)?



VI Differentialgleichungen I

Geben Sie alle Lösungen der folgenden DGLen und AWPs an:

1. $\dot{x}t = 2x$. Skizzieren Sie die Lösung!
2. $\dot{x} = \frac{2t}{t^2+1}x$
3. $x(1-t)\dot{x} = 1 - x^2$. Welche Form haben die Lösungen?
4. $t^2 x = (1+t)\dot{x},\ x(0) = 1$

VII Differentialgleichungen II

Geben Sie die Lösungsbasis des folgenden DGL-Systems an:

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$