Lösungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 2
Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner, Thomas Baldauf

I Richtig oder Falsch

> `Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Korrigieren bzw. ergänzen Sie falsche Aussagen. Geben Sie in beiden Fällen eine kurze Begründung an:`
>
> - Jede monoton wachsende *(fallende)* Folge (a_n) konvergiert gegen $\sup A$ *(*$\inf A$*)*, wobei $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.
> - Jede konvergente Folge ist beschränkt.
> - Jede beschränkte Folge ist konvergent.
> - Es seien die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergent mit $b = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$ und $(b_n) \leq (a_n) \leq (c_n)$ für fast alle n. Dann konvergiert auch (a_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = b$.
> - Haben die Folgen (a_n) und (b_n) die Grenzwerte a bzw. b, so gilt: $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

- Jede monotone **und beschränkte** Folge (a_n) konvergiert
- richtig. *Beweis:*
  Sei a der Grenzwert und N ein Index mit $|a_n - a| < 1$ für $n > N$, dann gilt $|a_n| \leq max\{|a| + 1, |a_1|, \dots, |a_N|\}$ für alle n.
- Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n$
- richtig. Die Ungleichung ist nur richtig, wenn aus $\leq$ ein Gleichheitszeichen wird.
- Gilt nur für $b \neq 0$. Dann sind fast alle $b_n \neq 0$.

II Grenzwert

> `Es sei` $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ `eine monoton fallende Folge in` $\mathbb{R}$ `mit` $x_1 < 1$, $x_n > 0$ `für alle` $n \in \mathbb{N}$ `und` $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. `Zeigen Sie, dass gilt:`
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n) - x_n}{x_n} = 0$$

Wir benutzen die Reihendarstellung des sin:

$$\sin(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\sin(x_n) - x_n}{x_n} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} - x_n}{x_n} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x_n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x_n^{2k}}{(2k+1)!}$$

Wir verwenden das Leibniz-Kriterium: $a_n := \left(\frac{x_n^{2k}}{(2k+1)!} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist für $x_n \in]0,1[$ eine monoton fallende Nullfolge. Die Monotonie ist klar. Um zu zeigen, dass es sich um eine Nullfolge handelt, definieren wir $z_n := \frac{1}{x_n}$ mit $z_n > 1$ für $x_n \in \;]0,1[$ und erhalten:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{z_n^{2k}(2k+1)!} = 0$$

Wir dürfen das Leibniz-Kriterium also anwenden. Das Leibniz-Kriterium gibt jedoch keine Aussage über den Grenzwert s. Dieser liegt aber immer zwischen zwei Partialsummen. Wir können folgende Abschätzung machen (vgl. Skript S. 56):

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$$

und für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt:

$$s_{2l-1} \leq s \leq s_{2l}$$

unsere Reihe eingesetzt ergibt das:

$$\begin{aligned} s_1 &\leq s \leq s_2 \\ -\frac{x_n^2}{2} &\leq s \leq -\frac{x_n^2}{2} + \frac{x_n^4}{24} \\ \to s &= 0 \text{ für } n \to \infty \end{aligned}$$

III Häufungspunkte

$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(3n+5)^2}$ besitzt zwei Häufungspunkte (HP): einen HP für gerade n und einen HP für ungerade n. Wir erhalten:

$$a_{2n+1} = \frac{-(4n^2 + 8n + 1)}{36n^2 + 96n + 64} \to -\frac{1}{9}$$

sowie

$$a_{2n} = \frac{4n^2}{36n^2 + 60n + 25} \to \frac{1}{9}$$

IV Konvergenzkriterien

```
Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert/
Konvergenzradius
```

a)

$$\sqrt{n^2+n}-n$$

b)

$$\frac{\sqrt[3]{27n+2}\cdot\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{16n^2-1}}$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{ne^n}(x+1)^n$$

d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot n!)^2}{(2n)!}$$

a) "Trick"

$$\sqrt{n^2+n}-n \quad = \quad \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

b) Höchste Potenz ausklammern

$$\frac{\sqrt[3]{27n+2}\cdot\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{16n^2-1}} = \frac{\sqrt[3]{27n^3+2n^2}}{\sqrt{16n^2-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{4}$$

c) Leibnizkriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{ne^n}(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{ne^n}(x+1)^n$$

$\left(\frac{1}{ne^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Damit konvergiert die Reihe. Der Konvergenzradius ist:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{ne^n}{(n+1)e^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)e}\right| = \frac{1}{e} \Rightarrow \rho = e$$

d) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{i\cdot((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{i\cdot(n!)^2}{(2n)!}}\right| = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{4}<1\Rightarrow \text{absolut konvergent}$$

V Konvergenzbereich

Der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$ wird mit dem Wurzelkriterium bestimmt: $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^2 = 1$ Für $x=-1$ haben wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

und mit dem Leibnizkriterium (monoton fallende Nullfolge) konvergiert die Reihe auch für $x=-1$. Für $x=1$ haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Dies konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{6}$ (Riemannsche Zeta-Funktion). Damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\text{ konvergiert für } x\in[-1,1]$$

VI Goldener Schnitt

Für den goldenen Schnitt g, der ein (ganz bestimmtes) Verhältnis von zwei Strecken angibt, gilt:

$$1:g=g:(1+g),\qquad g>0$$

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}, a_0=1$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

einen Grenzwert besitzt und dieser genau dem goldenen Schnitt entspricht. Zeigen Sie dazu, dass die Folge beschränkt und monoton ist.

Wir zeigen die Monotonie. Es gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ mit } a_0 = 1$$

Wir beweisen mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang:

$$a_1 = \sqrt{1 + a_0} = \sqrt{2} > a_0$$

$\Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung (I.V.) ist $a_{n+1} > a_n$
Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$a_{n+2} = \sqrt{1 + a_{n+1}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + a_n}} \overset{I.V.}{>} \sqrt{1 + a_n} = a_{n+1}$$

Dabei wurde benutzt, dass die Wurzelunktion für $x > 1$ monoton steigt. Außerdem zeigen wir noch Beschränktheit. Wir berechnen zuerst einige Werte:

$$\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{1 + \sqrt{2}} < \sqrt{3} \\ a_3 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} < \sqrt{1 + \sqrt{3}} < \sqrt{4} \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass die Folge durch den Wert 2 beschränkt ist (tatsächlich durch den goldenen Schnitt, wir müssen aber nur zeigen, *dass* sie beschränkt ist). Wir beweisen wieder durch vollständige Induktion:
Induktionsvoraussetzung:

$$a_n < 2 \quad \forall n > 1$$

Induktionsanfang: wurde bereits gezeigt.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \overset{I.V.}{<} \sqrt{3} < 2$$

Damit ist die Beschränktheit gezeigt. Die Folge ist beschränkt und monoton, also konvergiert sie. Wir zeigen, dass der Grenzwert der goldene Schnitt ist:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + a_n} \\ a &= \sqrt{1 + a} \\ a^2 - a - 1 &= 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Letztere Gleichung erhält man auch beim Auflösen der angegebenen Gleichung für g. Wir wählen das positive Vorzeichen, da alle a_n größer sind als 1 und die Folge monoton wächst. Deshalb ist $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ kein zulässiger Wert für a. Wir erhalten für den Grenzwert:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = g \approx 1.62$$

VII Cauchy-Produkt

Für $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

zeigen Sie, dass die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren. Konvergiert ihr Cauchy-Prdukt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$?

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, da

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Nullfolge ist.
Das Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ ist:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

Da $(n-k+1)(k+1) = (-k^2 + nk + n + 1)$ und $k = 0, \ldots, n$, gilt:

$$(-k^2 + nk + n1) \leq (nk + n + 1) \leq (n^2 + n + 1) < (n^2 + 2n + 1) = (n+1)^2$$

Somit $\frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} > \frac{1}{n+1}$ und nach Abschätzung durch die Anzahl der Summenglieder:

$$|c_n| > \frac{(n+1)}{n+1} = 1$$

Damit ist gezeigt, dass das Cauchy-Produkt von (a_n) und (b_n) nicht konvergiert.

VIII Koch-Schneeflocke

Die Koch-‘‘Schneeflocke’’ ist ein einfaches Beispiel für ein Fraktal. Man geht von einem gleichseitigem Dreieck der Seitenlänge $c = 1$ aus, teilt im Iterationsschritt n jede Seite in drei Teile, nimmt das mittlere Stück weg und ersetzt dies durch ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Seitenlänge usw.:

`Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt der Schneeflocke (für` $n \to \infty$`). Was fällt auf?`
`Hinweis:` `Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks beträgt` $c^2 \cdot \sqrt{3}/4$. `Im` n`-ten Iterationsschritt kommen` $3 \cdot 4^{n-1}$ `Dreiecke mit Seitenlänge` 3^{-n} `hinzu. Ergebnis:` $A = 2 \cdot \sqrt{3}/5$.

Wir haben für den Umfang nach dem n-ten Schritt:

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0;\ U_0 = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow U_n \to \infty$$

Der Umfang der Schneeflocke divergiert also. Wir berechnen die Werte für die Flächeninhalte nach 0,1 und 2 Iterationsschritten:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, A_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}}_{A_0} + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4^0}; A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$$

Nach unendlich vielen Schritten ist der Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A_\infty &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{3^i}\right)^2 4^{i-1} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right) \overset{geom. Reihe}{=} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Kochsche Schneeflocke einen endlichen Flächeninhalt, aber einen unendlichen Umfang hat!