Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 2
Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner, Thomas Baldauf

I Richtig oder Falsch?

Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Korrigieren bzw. ergänzen Sie falsche Aussagen. Geben Sie in beiden Fällen eine kurze Begründung (in Worten) an:

- Jede monoton wachsende *(fallende)* Folge (a_n) konvergiert gegen $\sup A$ *(*$\inf A$*)*, wobei $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Jede beschränkte Folge ist konvergent.
- Es seien die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergent mit $b = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$ und $(b_n) \leq (a_n) \leq (c_n)$ für fast alle n. Dann konvergiert auch (a_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = b$.
- Haben die Folgen (a_n) und (b_n) die Grenzwerte a bzw. b, so gilt: $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

II Grenzwert

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_1 < 1,\ x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n) - x_n}{x_n} = 0$$

III Häufungspnkte

Bestimmen Sie die Häufungspunkte von

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(3n+5)^2}$$

IV Konvergenzkriterien

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert/Konvergenzradius

a)

$$\sqrt{n^2+n} - n$$

b)

$$\frac{\sqrt[3]{27n+2} \cdot \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{16n^2-1}}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n}(x+1)^n$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot n!)^2}{(2n)!}$$ hier reicht zu zeigen, dass die Reihe konvergiert!

V Konvergenzbereich

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich von

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

VI Goldener Schnitt

Für den goldenen Schnitt g, der ein (ganz bestimmtes) Verhältnis von zwei Strecken angibt, gilt:

$$1 : g = g : (1+g), \quad g > 0$$

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, a_0 = 1$ mit

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$$

einen Grenzwert besitzt und dieser genau dem goldenen Schnitt entspricht. Zeigen Sie dazu, dass die Folge beschränkt und monoton ist.

VII Cauchy-Produkt

Für $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

zeigen Sie, dass die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren.

Konvergiert ihr Cauchy-Prdukt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$?

VIII Koch-Schneeflocke

Die Koch-“Schneeflocke” ist ein einfaches Beispiel für ein Fraktal. Man geht von einem gleichseitigem Dreieck der Seitenlänge $c = 1$ aus, teilt im Iterationsschritt n jede Seite in drei Teile, nimmt das mittlere Stück weg und ersetzt dies durch ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Seitenlänge usw.:

Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt der Schneeflocke (für $n \to \infty$). Was fällt auf?
Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $c^2 \cdot \sqrt{3}/4$. Im n-ten Iterationsschritt kommen $3 \cdot 4^{n-1}$ Dreiecke mit Seitenlänge 3^{-n} hinzu. Ergebnis: $A = 2 \cdot \sqrt{3}/5$.