Lösungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 1

Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

I. Grundbegriffe:

1. Es seien A_1, $A_2 \subseteq A$ und B Mengen, sowie $f : A \to B$ eine Abbildung. Man beweise:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \tag{1}$$

Wann würde Gleichheit gelten?

Lösung:

Sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$ beliebig:

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cap A_2) &\Leftrightarrow \exists x \in (A_1 \cap A_2) : y = f(x) \\ &\Rightarrow (\exists x \in A_1 : y = f(x)) \wedge (\exists x \in A_2 : y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in (f(A_1) \cap f(A_2)) \end{aligned}$$

Gleichheit würde bei Injektivität gelten, denn dann wäre die andere Richtung möglich:

$$\exists x \in (A_1 \cap) A_2 : y = f(x) \Leftarrow (\exists x \in A_1 : y = f(x)) \wedge (\exists x \in A_2 : y = f(x))$$

2. Man zeige die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad x > 0, y \geq 0 \tag{2}$$

Lösung:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2 - 4xy) = \frac{1}{4}(x-y)^2 > 0$$

3. Man zeige:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Lösung:

Für $k > n$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt, da der Binomialkoeffizient 0 ergibt. Wir bertrachten also $k \leq n$:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{j=n-k+1}^{n} j = \prod_{i=1}^{k}(n-k+i)$$

also

$$\frac{n!}{n^k(n-k)!} = \frac{1}{n^k}\prod_{j=n-k+1}^{n} j = \prod_{i=1}^{k}\frac{n-k+i}{n} \leq 1$$

Also erhält man:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{n!}{n^k(n-k)!k!} \leq \frac{1}{k!}$$

4. Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n+1)) \tag{4}$$

bijektiv?

Lösung:

Die Abbildungswerte lauten $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$, Bijektivität liegt also nahe. Man kann die Abbildungsvorschrift auch so schreiben:

$$\begin{cases} -\frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}(n+1) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es ist $f(0) = 0$. Für $k > 0$ ist $f(2k-1) = k$, für $k < 0$ ist $f(-2k) = k$. Damit hat jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Urbild, die Abbildung ist also surjektiv.

Die Abbildung ist auch injektiv, da auf $f(n) = f(m)$ folgt:

$$(-1)^n(2n+1) = (-1)^m(2m+1) \tag{5}$$

Haben n und m dasselbe Vorzeichen so folgt gleich $n = m$, sind die Vorzeichen unterschiedlich, so folgt $n = -m$, was aber nur im Definitionsbereich liegt, falls $n = m = 0$. In jedem Fall ist also $n = m$, damit ist f insgesamt bijektiv.

Beweise:

1. Man beweisen durch vollständige Induktion: n Geraden können die Ebene ($\mathbb{R}^2$) höchstens in $(n^2 + n + 2)/2$ Gebiete zerlegen ($n \in \mathbb{N}_0$). Wann würde Gleichheit gelten? (ohne Beweis) *Hinweis:* Wieviele neue Gebiete kommen durch eine neue (höchstens) Gerade hinzu?

   Lösung:

   Induktionsanfang: $n = 1$: $(1^2 + 1 + 2)/2 = 2$ Gebiete.

   Induktionsschritt: $n \to n+1$: Eine neue Gerade schneidet höchstens n Geraden und geht somit höchsten durch $n+1$ Gebiete, die dann durch sie geteilt werden, d.h. es gibt nun höchsten $n+1$ mehr Gebiete:

$$\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$$

   Gleichheit würde gelten, falls ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ höchsten Schnittpunkt zweier geraden ist. Außerdem darf es keine parallelen Geraden geben.

2. Die Fibonacci-Zahlen F_n sind rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1} \tag{6}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1}(F_i)^2 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot (1+0) = F_1(F_0 + F_1) = F_1 F_2$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 = F_n F_{n+1}$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(F_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 + (F_{n+1})^2 \overset{\text{I.V.}}{=} F_n F_{n+1} + F_{n+1} = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$$

3. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$2^n < n! \quad \forall\, n > 3 \tag{7}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 4$:

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Induktionsvoraussetzung:

$$2^n < n!$$

Induktionsschritt:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.V.}}{<} 2 \cdot n! < (n+1)n! = (n+1)!$$

da $2 < n + 1$ für $n > 3$.

4. Man zeige durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \tag{8}$$

Lösung

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\prod_{k=0}^{0}\left(1 + x^{2^k}\right) = 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

Induktionsschritt: $(n - 1 \to n)$

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right) = \left(1 + x^{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + x^{2^k}\right) \overset{\text{I.V.}}{=} \left(1 + x^{2^n}\right)\frac{1 - x^{2^n}}{1 - x} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

5. Sei n eine natürliche Zahl größer 1. Man zeige durch vollständige Induktion, dass die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ genau 2^n Teilmengen hat.

   Lösung:

   Induktionsanfang: $n = 1$: Eine einelementige Menge besitzt $2^1 = 2$ Teilmengen, nämlich die leere Menge und sich selbst.

   Induktionsschritt: $n \to n+1$: Nach Induktionsannahme hat die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ genau 2^n Teilmengen, die wir $M_1, \ldots, M_{2^n}$ nennen. Das sind dann genau die Teilmengen von $M = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, die $n+1$ nicht als Element enthalten.

   Die Mengen $M_{2^n+1} = M_1 \cup \{n+1\}, M_{2^n+2} = M_2 \cup \{n+1\}, \ldots, M_{2^n+2^n} = M_{2^n} \cup \{n+1\}$ sind Teilmengen von M, die $\{n+1\}$ als Element enthalten. Also hat M genau $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

6. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

   für $n \geq 1$.

   Lösung:

   Die Behauptung lässt sich schreiben als:

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

   Induktionsanfang: $n = 1$:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

   Induktionsschritt: $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \overset{\text{I.V.}}{\geq} 1 + \frac{n}{2} + 2^n \min_{k \in \{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\}} \left(\frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

III. Komplexe Zahlen:

1. Man berechne: $\sum\limits_{n=1}^{2015} \mathrm{i}^n$

   Lösung:

   Wegen der Periodizität von i^n ist $\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} + 1 = 0$. Da $2015 \bmod 4 = 3$ ist, gilt:

$$\sum_{n=1}^{2015} \mathrm{i}^n = \sum_{n=2013}^{2015} \mathrm{i}^n = \mathrm{i} - 1 - \mathrm{i} = -1$$

2. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ (Einheitswurzeln)

   Lösung:

$$z^8 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi} \Leftrightarrow z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{8}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 7$$

   Es gibt genau 8 Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$, die die Gleichung lösen, nämlich:

$$0,\ \frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,$$

   Wir erhalten 8 Lösungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} &= 1 \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\pi} &= \mathrm{i} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} &= -1 \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{4}\pi} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{2}\pi} &= -\mathrm{i} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{4}\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

3. Man berechne Imaginär- und Realteil sowie wie Argument (Phase) von $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^{100}$.

   Lösung:

   Wir schreiben die Zahl $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ in Polarkoordinaten:

$$r = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$

   Also ist:

$$z^{100} = 2^{100}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 16\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 16\pi\right)\right) = 2^{100}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

   Somit ist

$$\mathrm{Re}(z) = -2^{99}, \quad \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}\cdot 2^{99}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

4. ($*$) Man zeige, dass durch

$$f : z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}, \quad \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \tag{9}$$

   eine bijektive Abbildung definiert ist. *Hinweis:* Man darf ohne Beweis annehmen, dass $\mathrm{Im}(\mathrm{i}(1 + x)/(1 - x)) > 0$ ist für komplexe Zahlen $|x| < 1$.

Lösung:

Da $\mathrm{Im}(z) > 0$ ist auf jeden Fall:

$$\left|\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right| < 1$$

Ansonsten kann man $z = x + \mathrm{i}y$ setzen und explizit den Betrag berechnen.

Die Funktion ist injektiv, denn: Seien z_1, z_2 komplexe Zahlen mit $f(z_1) = f(z_2)$. Zu zeigen ist, dass $z_1 = z_2$. Es gilt also:

$$\begin{aligned}(z_1 - \mathrm{i})(z_2 + \mathrm{i}) &= (z_2 - \mathrm{i})(z_1 + \mathrm{i}) \\ \Leftrightarrow z_1 z_2 + \mathrm{i}(z_1 - z_2) + 1 &= z_1 z_2 + \mathrm{i}(z_2 - z_1) + 1 \\ \Leftrightarrow z_1 &= z_2\end{aligned}$$

Die Funktion ist auch surjektiv, denn: Sei w ein Funktionswert, sodass es ein z gibt mit $f(z) = w$, es gilt also:

$$\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} = w \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\frac{1 + w}{1 - w}$$

Laut Hinweis in der Angabe is der Imaginärteil dieser Zahl größer Null, dementsprechend auch im geforderten Definitionsbereich. Die Funktion ist also tatsächlich injektiv.

5. Man bestimme die Lösungen von $w = \sqrt{\mathrm{i}}$.

   Lösung:

   $$\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})^2 = \mathrm{i}$$

   also ist

   $$w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$$

   Alternativ kann man die Formel für die Wurzel verwenden ($\varphi = \pi/2$):

   $$\begin{aligned}w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}) \\ w_2 &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})\end{aligned}$$

6. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Gleichung

   $$(1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n = 0 \tag{10}$$

   erfüllt?

   Lösung:

   Die Aufgabe lässt sich am einfachsten durch die Polardarstellung lösen:

   $$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Daraus folgt:

$$(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \overset{!}{=} 0$$

Also muss gelten

$$\frac{n\pi}{4} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n = 2(1+2k)$$

Unter der Bedingung, dass $n \in \mathbb{N}_0$ ist, erhalten wir das Ergebnis:

$$n = 2(1+2k), \quad k \in \mathbb{N}_0$$