# Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 1

## Wintersemester 2014/2015

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

**I. Grundbegriffe:**

1. Es seien $A_1, A_2 \subseteq A$ und $B$ Mengen, sowie $f : A \to B$ eine Abbildung. Man beweise:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \tag{1}$$

   Wann würde Gleichheit gelten?

2. Man zeige die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad x > 0, y \geq 0 \tag{2}$$

3. Man zeige:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

4. Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n+1)) \tag{4}$$

   bijektiv?

**Beweise:**

1. Man beweisen durch vollständige Induktion: $n$ Geraden können die Ebene ($\mathbb{R}^2$) höchstens in $(n^2 + n + 2)/2$ Gebiete zerlegen ($n \in \mathbb{N}_0$). Wann würde Gleichheit gelten? (ohne Beweis) *Hinweis:* Wieviele neue Gebiete kommen durch eine neue Gerade (höchstens) hinzu?

2. Die Fibonacci-Zahlen $F_n$ sind rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1} \tag{5}$$

3. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$2^n < n! \quad \forall\, n > 3 \tag{6}$$

4. Man zeige durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \tag{7}$$

5. Sei $n$ eine natürliche Zahl größer 1. Man zeige durch vollständige Induktion, dass die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ genau $2^n$ Teilmengen hat.

6. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

   für $n \geq 1$.

**III. Komplexe Zahlen:**

1. Man berechne: $\sum_{n=1}^{2015} \mathrm{i}^n$

2. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ (Einheitswurzeln)

3. Man berechne Imaginär- und Realteil sowie wie Argument (Phase) von $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^{100}$.

4. $(*)$ Man zeige, dass durch

$$f : z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}, \quad \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \tag{8}$$

   eine bijektive Abbildung definiert ist. *Hinweis:* Man darf ohne Beweis annehmen, dass $\mathrm{Im}(\mathrm{i}(1 + x)/(1 - x)) > 0$ ist für beliebige komplexe Zahlen $x$ mit $|x| < 1$.

5. Man bestimme die Lösungen von $w = \sqrt{\mathrm{i}}$.

6. Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Gleichung

$$(1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n = 0 \tag{9}$$

   erfüllt?