Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

Probeklausur

5.1 Lineare Abbildung

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3; x \mapsto Ax$, welche (bezüglich der Standardbasen) gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $Kern(f)$ und eine Basis von $Bild(f)$.

(b) Ist die Abbildung f injektiv? Ist die Abbildung f surjektiv?

(c) Wir betrachten die Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix D_{BC} von f bezüglich dieser Basen.

Lösung:

- (a) Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_2\to Z_2-2Z_1 \& Z_3\to Z_3-Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1\to Z_2+Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen der Gleichung $Ax = 0$ sind also alle x mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Damit ist zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von Kern(f). Das Bild von f wird von den Spaltenvektoren von A aufgespannt. Da der Kern zweidimensional ist, ist das Bild nach der Dimensionsformel ebenfalls zweidimensional. Obiger Rechnung entnimmt man, dass die ersten beiden Spalten linear unabhängig sind. Damit ist zum Beispiel

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis vom Bild(f).

(b)
- Wegen dim(Kern(f))=2 ist Kern(f)$\neq \{0\}$ und f somit nicht injektiv
- Wegen dim(Bild(f))=2 ist Bild(f)$\neq \mathbb{R}^3$ und somit f nicht surjektiv.

(c) Wir berechnen

$$\varphi(b_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1$$

$$\varphi(b_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = c_2$$

$$\varphi(b_3) = A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(b_4) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als darstellende Matrix sofort

$$D_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativer Lösungsweg: Man verwendet die Transformationsformel und berechnet die Transformationsmatrizen.

$$D_{BC} = S_{CE} \cdot D_E \cdot S_{EB} = S_{EC}^{-1} \cdot D_E \cdot S_{EB} = S_{EC}^{-1} \cdot A \cdot S_{EB}$$

5.2 Eigenwerte, Eigenvektoren

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 zum Eigenvektor $(-1,1)^T$.

(d) Bestimmen Sie die Menge M *aller* Eigenwerte von A.

Lösung:

(a) Wir sehen sofort:

$$\mathrm{Spur}(A) = 2i \text{ und } \det(A) = i^2 - 1 = -2$$

(b) Wir erhalten

$$\chi_A(\lambda)\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} i-\lambda & -1 \\ -1 & i-\lambda \end{pmatrix} = (i-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2i\lambda - 2.$$

(c) Wir berechnen

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = (i+1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

somit ist $i+1$ ein Eigenwert zu $(-1,1)^T$.

(d) Wir klammern den Term $(\lambda - (i+1))$ aus $\chi_A(\lambda)$ aus und erhalten

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - i - 1)(\lambda - i + 1).$$

Somit ist die Menge aller Eigenwerte $M = \{i+1, i-1\}$.

5.3 Eigenwerte/-vektoren mit Parameter

Wir betrachten die folgende Matrix mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$,

$$A := \begin{pmatrix} 3a-2 & 3-3a & a-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4-4a & 3a & 2-a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3.}$$

(a) Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ stets ein Eigenvektor von A ist und geben Sie den dazugehörigen Eigenwert an.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Wir betrachten den Fall $a = 1$. Zeigen Sie, dass A in diesem Fall diagonalisierbar ist. Geben Sie die zugehörige Diagonalmatrix an.

(d) Wir betrachten den Fall $a = 2$ (**Zwischenergebnis:** In diesem Fall lautet das charakteristische Polynom $\chi_A = (2-\lambda)^3$). Zeigen Sie, dass A in diesem Fall nicht diagonalisierbar ist. Geben Sie die Jordannormalform von A an.

Lösung:

(a) Wir berechnen

$$Av = \begin{pmatrix} 3a-2 & 3-3a & a-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4-4a & 3a & 2-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = av$$

Somit ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a.

(b) Man sieht der Matrix sofort an, dass $\lambda_1 = 2$ ein Eigenwert ist, denn beim Entwickeln des charakteristischen Polynoms nach der zweiten Zeile erhält man den Faktor $(2-\lambda)$. Nach dem ersten Aufgabenteil ist $\lambda_2 = a$ ein zweiter Eigenwert. Der dritte Eigenwert λ_3 ergibt sich aus der Eigenschaft, dass die Spur einer Matrix gleich der Summe aller Eigenwerte ist:

$$\mathrm{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = \mathrm{spur}(A) - \lambda_1 - \lambda_2 = (2a+2) - 2 - a = a.$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_{2,3} = a$.
Alternativ, kann auch nach Rezept das charakteristische Polynom berechnet werden.

(c) Im Fall $a = 1$ besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_{2,3} = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten $a_A(1) = 2$ und $a_A(2) = 1$. Es ist nur zu zeigen, dass die geometrische Vielfachheit $g_A(1)$ des doppelten Eigenwertes $\lambda_{2,3} = 1$ ebenfalls zwei ist:

$$\mathrm{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 3a-3 & 3-3a & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4-4a & 3a & 1-a \end{pmatrix} \overset{a=1}{=} \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Es folgt aus $\dim(\mathrm{Kern}) = n - \mathrm{Rang}(\mathrm{Kern})$

$$g_A(1) = \dim(\mathrm{Kern}(A - 1 \cdot E_3)) = 3 - \mathrm{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2.$$

Damit ist A diagonalisierbar und die entsprechende Diagonalmatrix ist zum Beispiel

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Im Fall $a = 2$ besitzt A nur den Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $a_A(2) = 3$. Es ist nun zu zeigen, dass für die geometrische Vielfachheit gilt $g_A(2) \neq a_A(2) = 3$:

$$\mathrm{Rang}(A - 2 \cdot E_3) = \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 3a-4 & 3-3a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4-4a & 3a & -a \end{pmatrix} \overset{a=2}{=} \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

Es folgt

$$g_A(2) = \dim(\mathrm{Kern}(A - 2 \cdot E_3)) = 3 - \mathrm{Rang}(A - 2 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2.$$

Damit ist A nicht diagonalisierbar. Wegen $g_A(2) = 2$ gibt es zum Eigenwert 2 genau zwei Jordanblöcke und die entsprechende Jordannormalform (existiert, da χ_A in Linearfaktoren zerfällt, aber danach war nicht gefragt) ist zum Beispiel

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.4 Positive Semidefinitheit

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$. Zeigen Sie, dass $A^T A$ symmetrisch und positiv semidefinit und im Fall $Rang(A) = n$ positiv definit ist.

Lösung: Zunächst ist $B := A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Symmetrie von B folgt aus

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$$

(siehe Matrix-Rechenregeln). Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x^T B x = x^T A^T A x = (Ax)^T A x = y^T y = y_1^2 + \cdots + y_n^2 \geq 0$$

mit $y = (y_1, ..., y_n)^T = Ax$. Die Matrix B ist somit positiv semidefinit. Positive Definitheit erhalten wir genau dann, wenn die Ungleichung für alle $x \neq 0$ strikt gilt (also wenn $x^T B x = y^T y > 0$). Das ist genau dann der Fall, wenn $Ax \neq 0, \forall x \neq 0$; oder äquivalent $0 = \dim \text{Kern}(A) = n - \text{Rang}(A)$. Die Matrix A ist somit genau dann positiv definit, wenn A den Rang n hat.

5.5 Bilinearform

Wir betrachten die Bilinearform $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \phi(x, y) = x^T Ay$, welche (bezüglich der Standardbasis) gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Bilinearform ϕ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Wir arbeiten nun mit dem Skalarprodukt $\langle x|y\rangle := \phi(x, y)$ im Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \langle\ |\ \rangle)$ und betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass diese jeweils Länge 1 haben und orthogonal zueinander sind.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ für den Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \langle\ |\ \rangle)$.

Lösung:

(a) Die Bilinearform ϕ ist symmetrisch, da die darstellende Matrix A symmetrisch ist. Die Bilinearform ϕ ist nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, denn es gilt

$$\det(3) = 3 > 0, \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0, \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 6 - 3 - 2 = 1 > 0.$$

Damit ist ϕ ein Skalarprodukt.

(b) Wir berechnen:

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1|v_1\rangle = \phi(v_1, v_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|v_2\|^2 = \langle v_2|v_2\rangle = \phi(v_2, v_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle v_1|v_2\rangle = \phi(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich, dass v_1 und v_2 jeweils die Länge 1 haben und orthogonal zueinander sind

(c) Da v_1 und v_2 bereits orthogonal und normiert sind, fehlt nur noch ein v_3. Dazu ergänzen wir (v_1, v_2) mit $w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ zu einer Basis (v_1, v_2, w_3) des $\mathbb{R}^3$. Dann orthogonalisieren wir

$$\widetilde{w_3} = w_3 - \langle w_3, v_1\rangle v_1 - \langle w_3, v_2\rangle v_2 = w_3 - \phi(v_1, w_3)v_1 - \phi(v_2, w_3)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich normieren wir

$$v_3 = \frac{\widetilde{w}_3}{\sqrt{\|widetildew_3\|}} = \frac{\widetilde{w}_3}{\sqrt{\langle \widetilde{w}_3 | \widetilde{w}_3 \rangle}} \frac{\widetilde{w}_3}{\sqrt{\phi(\widetilde{w}_3, \widetilde{w}_3)}} = \sqrt{6} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \phi)$.

5.6 Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_2$ ist eine lineare Abbildung.

(c) Für $\lambda \neq 0$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$ gilt: $(\lambda \cdot A^T)^{-1} = (\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1})^T$

(d) $\{x \in \mathbb{R}^4 | \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ ist ein Untervektorraum.

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_2 = 1 \right\}$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

(f) Für alle Untervektorräume $U, V \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $dim(U + V) = dim(U) + dim(V)$

(g) Es ist möglich, dass sich zwei zweidimensionale Untervektorräume im $\mathbb{R}^4$ in genau einem Punkt schneiden.

(h) Die Matrix $\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}$ ist unitär.

(i) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ist normal.

(j) Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f((-3, 1, 4)^T) = ((1, 2)^T)$ und $f((2, 2, 0)^T) = ((0, 1)^T)$.

(k) Im Vektorraum der (2×2)-Matrizen über einem Körper K ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \mid a + b - c = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum.

(l) Ist U ein Untervektorraum eines $K-$Vektorraums V, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$v \in U \ \wedge \ w \notin U \Rightarrow v + w \notin U.$$

(m) Für Abbildungen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ zwischen Mengen gilt:

$$\psi \circ \varphi \text{ bijektiv } \Rightarrow \psi \text{ injektiv } \wedge \varphi \text{ surjektiv.}$$

Lösung:

(a) Falsch.Die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in s_3$ ist ungerade, denn sie besteht nur aus einer Transposition (nur 1 und 3 werden vertauscht) es gilt also $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

(b) Wahr.Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_2$ ist linear, sie wird bezüglich der Standardbasen zum Beispiel durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt.

(c) Wahr. Für $\lambda \neq 0$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt nach den bekannten Rechenregeln: $(\lambda \cdot A^T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot (A^T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot (A^{-1})^T = (\frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1})^T$.

(d) Falsch. $\{x \in \mathbb{R}^4 | \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ ist kein Untervektorraum, da zum Beispiel $x = 0$ nicht darin enthalten ist.

(e) Wahr. $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 1 \right\}$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, denn es liegen zum Beispiel die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in dieser Menge und allein diese drei Vektoren spannen schon den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf.

(f) Falsch. Die Dimensionsformel für die Summe von Untervektorräumen lautet richtig:

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

(g) Wahr. Man betrachte zum Beispiel die Standardbasis (e_1, e_2, e_3, e_4) des $\mathbb{R}^4$ und dazu die beiden Untervektorräume $U_1 = Lin(e_1, e_2)$ und $U_2 = Lin(e_3, e_4)$: Sie sind zweidimensional und schneiden sich genau im Nullpunkt.

(h) Falsch. Die Matrix $\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}$ ist nicht unitär, da zum Beispiel der erste Spaltenvektor nicht normiert ist.

(i) Falsch. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ist nicht normal, denn es gilt $A \cdot A^T \neq A^T \cdot A$.

(j) Falsch. Eine lineare Funktion wird eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren einer Basis des Bildbereichs (also hier $\mathbb{R}^3$) definiert. Hier wurden nur die Bilder von zwei Basisvektoren festgelegt, es bleiben noch (unendlich viele) Wahlmöglichkeiten für die Festlegung des Bildes eines dritten Basisvektors. Es gibt also nicht nur eine lineare Funktion der geforderten Eigenschaften.

(k) Wahr. Basis des Vektorraums wäre beispielsweise

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Man kann auch die UVR-Eigenschaften überprüfen: Die Menge enthält die Nullmatrix und ist abgeschlossen gegenüber Addition und Multiplikation mit Skalaren.

(l) Wahr. Angenommen die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es ein $v \in U$, $w \in V \backslash U$ mit $v + w \in U$. Nach den Unterraumeigenschaften folgte $w = (v + w) - v \in U$. Das ist ein Widerspruch!

(m) Falsch. Als Gegenbeispiel nehme man beispielsweise $X, Z := \{0\}, Y := \{0, 1\}$ und $\varphi = \psi = \mathrm{id}$. Dann ist $\psi \circ \varphi : \{0\} \to \{0\}$ die Identität (und damit bijektiv), trotzdem ist $\varphi : \{0\} \to \{0, 1\}$ nicht surjektiv.