Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

4. Übung: JNF, Skalarprodukt, Hauptachsentransformation

4.1 Matrixexponential

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der folgenden Matrizen (in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$):

$$(a) A_t = \begin{pmatrix} 2t & t & 0 \\ 0 & 2t & t \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \quad (b) B_t = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ t & 3t & 0 \\ 0 & t & 3t \end{pmatrix} \quad (c) C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung
(a)

$$\exp(A_t) = \exp\left[\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = (\text{nutze diag} \cdot \text{nilpotent} = \text{nilpotent} \cdot \text{diag})$$

$$= \exp\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & 1/2\ t^2 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}\ t & 1/2\ e^{2t}\ t^2 \\ & e^{2t} & e^{2t}\ t \\ & & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \exp\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^1 + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 1/2\ t^2 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\exp(B_t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & & \\ e^{3t}\ t & e^{3t} & \\ 1/2\ e^{3t}\ t^2 & e^{3t}\ t & e^{3t} \end{pmatrix}$$

(c) Unterer Jordanblock: exp(5) Oberer Jordanblock analog (a) und (b):

$$\exp\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \exp(4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(C) = \begin{pmatrix} e4 & 0 & 0 \\ e^4 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}$$

4.2 Jordan-Normalformen

Geben Sie (ohne Begründung) die JNF der folgenden Matrizen an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

Lösung
JNF von A: diag(1,2,3,4,5)

JNF von B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 komplexe Skalarprodukte

Begünden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\langle , \rangle : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ Skalarprodukte sind:

a) $\langle (x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \rangle := -\bar{x_1} y_1 + \bar{x_2} y_2$

b) $\langle (x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \rangle := -i\bar{x_1} y_2 + i\bar{x_2} y_1 + \bar{x_3} y_3$

c) $\langle (x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \rangle := 4\bar{x_1} y_1 + 4\bar{x_1} y_2 + 4\bar{x_2} y_1 + 4\bar{x_2} y_2 + 6\bar{x_3} y_3$

Tipp: Zu zeigen ist, dass $\langle x, y \rangle = x^T A y$ mit der hermitischen Matrix A (Sesquilinearform), und dass die Abbildung positiv definit ist.

Lösung
Drei Eigenschaften sind zu zeigen:

1. sesquilinear $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\langle x, y \rangle = \bar{x}^T A y$
2. hermitesch $\Leftrightarrow A$ hermitesch
3. positiv definit $\Leftrightarrow \langle v, v \rangle > 0 \forall v \in \mathbb{C}^n$

(a)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Aber $\langle e_3, e_3 \rangle = 0 \Rightarrow$ nicht positiv definit.

(b)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

A nicht hermitisch, da $\bar{i} = -i$
(c)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, x \rangle = 4\bar{x_1} x_1 + 4\bar{x_1} x_2 + 4\bar{x_2} x_1 + 4\bar{x_2} x_2 + 6\bar{x_3} x_3$$
$$= 4(x_1 + x_2)(\bar{x_1} + \bar{x_2}) + 6\bar{x_3} x_3 = |x_1 + x_2|^2 + 6|x_3|^2 \geq 0$$

4.4 Darstellungsmatrix und orthogonales Komplement

Es sei $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der Vektorrau, der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und f sei das Skalarprodukt

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

a) Bestimmen SIe die zugehörige "Darstellungsmatrix" $A := (\langle b_i, b_j\rangle)_{i,j} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ bzgl. der (geordneten) Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von V.

b) Bestimmen SIe das orthogonale Komplement $U^\perp$ zum Unterraum $U := \langle 1, x, x^2\rangle \subseteq V$.

Lösung
(a) Es gilt

$$\begin{gathered}\langle 1,1\rangle = 1 \quad \langle 1,x\rangle\frac{1}{2} \quad \langle 1,x^2\rangle = \frac{1}{3} \quad \langle 1,x^3\rangle = \frac{1}{4} \\ \langle x,x\rangle = \frac{1}{3} \quad \langle x,x^2\rangle = \frac{1}{4} \quad \langle x,x^3\rangle = \frac{1}{5} \\ \langle x^2,x^2\rangle = \frac{1}{5} \quad \langle x^2,x^3\rangle = \frac{1}{6} \\ \langle x^3,x^3\rangle = \frac{1}{7}\end{gathered}$$

und damit erhalten wir für die Derstallungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}$$

(b) Wir wollen mit Hilfe der Darstellungsmatrix rechnen, also überlegen wir uns:

$$\begin{gathered} f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U^\perp \Leftrightarrow \langle 1, f\rangle = 0, \langle x, f\rangle = 0, \langle x^2, f\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow a_0\langle 1,1\rangle + a_1\langle 1,x\rangle + a_2\langle 1,x^2\rangle + a_3\langle 1,x^3\rangle = 0 \quad \text{und} \quad a_0\langle x,1\rangle + a_1\langle x,x\rangle + a_2\langle x,x^2\rangle + a_3\langle x,x^3\rangle = 0 \\ \text{und} \quad a_0\langle x^2,1\rangle + a_1\langle x^2,x\rangle + a_2\langle x^2,x^2\rangle + a_3\langle x^2,x^3\rangle = 0 \end{gathered}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4/ & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Es ist

$$Kern \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1 & 2/3 & 1/2 & 2/5 \\ 1 & 3/4 & 3/5 & 1/2 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 3/20 \\ 0 & 1/4 & 4/15 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= ... = Kern \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 3/20 \\ 0 & 0 & 1/90 & 1/60 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix} \rangle$$

Zürucküberсetzen in Polynome: Es ist $U^\perp = \langle -1b_1 + 12b_2 - 30b_3 + 20b_4\rangle = \langle 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1\rangle$

4.5 ONB ergänzen

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$:

$$(a) \quad V = \{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad , \qquad \}$$

$$(b) \quad W = \{\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \qquad , \qquad , \qquad \}$$

Lösung

(a) Suche v_2' mit $\langle v_2', \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle = 0$.

$$\Rightarrow 1v_{21}' + 1v_{22}' + 1v_{23}' = 0 \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Suche v_3' der orthogonal zu v_1 und v_2 $\Rightarrow$ für $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ Kreuzprodukt

$$v_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

(b) Suche zwei Vektoren, die zueinander und zu w_1 orthogonal sind. Nehme dafür je Vektor zwei unterschiedliche $x_i = 0$. Zum Beispiel:

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\0\\4\\-3\end{pmatrix}$$

Für w_4',berechne

$$w_4' = Kern\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & -3\end{pmatrix} = \langle\begin{pmatrix}-5\\-10\\3\\4\end{pmatrix}\rangle \Rightarrow w_4 = \frac{1}{5\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-5\\-10\\3\\4\end{pmatrix}$$

4.6 ONB berechnen

Bestimmen sie die Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes von

$$V = \langle\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Lösung

$$a_1 := \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$a_2' := b_2 - \langle a_1, b_2\rangle a_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\langle\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}\rangle \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_2 := -\frac{3}{7\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a_3' := b_3 - \langle a_1, b_3 \rangle a_1 - \langle a_2, b_3 \rangle a_2 = b_3 - 0 \cdot a_1 - 0 \cdot a_2 = b_3$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.7 Diagonalisierung einer reellen symmetrischen Matrix

Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie die orthogonale Matrix $S \in O_4(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung

$$\chi_A = (x-1) \cdot \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -2 & 0 & x-1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & x-1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= ... = (x+1)^2 (x-3)^2$$

Als nächsten brauchen wir die Eigenräume:

$$E_{-1} = Kern(A + I_4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad E_3 = Kern(A - 3I_4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S ist orthogonal, d. h. es gilt $S^T = S^{-1}$. Damit

$$S^{-1}AS = S^T AS = diag(-2, -2, 6, 6)$$

t	0	2	4	6	8	10
h	3	3,5	1,5	-1	- 1,5	0,5

4.8 Lineare Ausgleichsrechnung

Messungen an der Küste ergeben die Tabelle für den Wasserstand h (Meter) zur Tageszeit t (Stunden). Wir machen die vereinfachte Annahme, dass $h(t)$ durch eine harmonische Schwingung mit Periode 12 (Stunden) beschrieben wird, und wählen daher die Basisfunktionen $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \cos(\frac{\pi t}{6})$, $f_3(t) = \sin(\frac{\pi t}{6})$. Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Funktion f als Linearkombination der Basisfunktionen, die die Messwerte möglichst gut annähert.

Lösung
Wie in der TÜ definieren wir

$$A := (f_j(t_i))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und } y := \begin{pmatrix} 3 \\ 3,5 \\ 1,5 \\ -1 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Nach **Z 32** müssen wir die Normalgleichung $A^T Ax = A^T y$ lösen:

$$A^t Ax = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = A^T y$$

Mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = \sqrt{3}$ lautet die Ausgleichsfunktion also

$$f = 1 + 2\cos(\frac{\pi t}{6}) + \sqrt{3}\sin(\frac{\pi t}{6})$$

4.9 JNF, Jordanbasis von 3x3

Geben Sie von den Matrizen jeweils das char. Polyn., die Eigenräume, die JNF J und sie Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\chi_A = x(x-6)^2 \qquad \chi_B = (x-2)(x-3)^2$$

$$E_0 = Kern(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \qquad E_2 = Kern(A-2I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_6 = Kern(A-6I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \qquad E_3 = Kern(A-3I) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_B = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 1 & -16 & 0 \\ 1 & -16 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1/8 & 3/16 & -5/16 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$