Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

4. Übung: JNF, Skalarprodukt, Hauptachsentransformation

4.1 Matrixexponential

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der folgenden Matrizen (in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$):

$$(a) A_t = \begin{pmatrix} 2t & t & 0 \\ 0 & 2t & t \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \quad (b) B_t = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ t & 3t & 0 \\ 0 & t & 3t \end{pmatrix} \quad (c) C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2 Jordan-Normalformen

Geben Sie (ohne Begründung) die JNF der folgenden Matrizen an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

4.3 komplexe Skalarprodukte

Begünden Sie, welche der folgenden Abbildungen $\langle , \rangle : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ Skalarprodukte sind:

a) $\langle (x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \rangle := -\bar{x_1} y_1 + \bar{x_2} y_2$

b) $\langle (x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \rangle := -i\bar{x_1} y_2 + i\bar{x_2} y_1 + \bar{x_3} y_3$

c) $\langle (x_1, x_2, x_3)^T, (y_1, y_2, y_3)^T \rangle := 4\bar{x_1} y_1 + 4\bar{x_1} y_2 + 4\bar{x_2} y_1 + 4\bar{x_2} y_2 + 6\bar{x_3} y_3$

Tipp: Zu zeigen ist, dass $\langle x, y \rangle = x^T A y$ mit der hermitischen Matrix A (Sesquilinearform), und dass die Abbildung positiv definit ist.

4.4 Darstellungsmatrix und orthogonales Komplement

Es sei $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der Vektorrau, der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und f sei das Skalarprodukt

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

a) Bestimmen SIe die zugehörige "Darstellungsmatrix" $A := (\langle b_i, b_j \rangle)_{i,j} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ bzgl. der (geordneten) Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von V.

b) Bestimmen SIe das orthogonale Komplement $U^\perp$ zum Unterraum $U := \langle 1, x, x^2 \rangle \subseteq V$.

4.5 ONB ergänzen

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$:

$$(a) \quad V = \{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad , \qquad \}$$

$$(b) \quad W = \{ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad , \qquad , \qquad \}$$

4.6 ONB berechnen

Bestimmen sie die Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes von

$$V = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

4.7 Diagonalisierung einer reellen symmetrischen Matrix

Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie die orthogonale Matrix $S \in O_4(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

4.8 Lineare Ausgleichsrechnung

Messungen an der Küste ergeben die Tabelle
für den Wasserstand h (Meter) zur Tageszeit t (Stunden). Wir machen die vereinfachte Annahme,.

t	0	2	4	6	8	10
h	3	3,5	1,5	-1	- 1,5	0,5

dass $h(t)$ durch eine harmonische Schwingung mit Periode 12 (Stunden) beschrieben wird, und wählen daher die Basisfunktionen $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = \cos(\frac{\pi t}{6})$, $f_3(t) = \sin(\frac{\pi t}{6})$. Besteimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Funktion f als Linearkombination der Basisfunktionen, die die Messwerte möglichst gut annähert.

4.9 JNF, Jordanbasis von 3x3

Geben Sie von den Matrizen jeweils das char. Polyn., die Eigenräume, die JNF J und sie Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$