Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

3. Übung: Dartsellungsmtrizen, Determinanten, Eigenwerte

3.1 Darstellungsmatrizen I

Es sei V ein zwei-dimensionaler reeller Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, b_2\}$

$$c_1 := b_2 \qquad c_2 := \frac{1}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 \qquad c_3 := \frac{1}{2}b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}b_2$$

a) Zeigen Sie, dass auch $C = \{c_1, c_2\}$ eine Basis von V ist, und stellen Sie c_3 als Linearkombination dar.

b) Berechnen Sie $f(c_3)$ und $g(c_3)$ aus den linearen Abb. f, g mit
$f(c_1) := c_2 \quad f(c_2) := c_1 \quad g(c_1) := c_2 \quad g(c_2) := c_3$

c) Berechnen Sie folgende Darstellungsmatrizen:
$D_{C,C}(f), D_{C,C}(g), D_{C,B}(f), D_B(f), D_C(f \circ g), D_C(g \circ g)$

Lösung
(a) Da V die Dimension 2 hat und wir zwei Vektoren überprüfen sollen, zeigen wir, dass diese beiden unabhängig sind.

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0$$

$$\lambda_1 b_2 + \lambda_2(\frac{1}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\lambda_2 b_1 + (\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2)b_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1 = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 = c_2 - \sqrt{3}c_1$$

(b)

$$f(c_3) = f(c_2 - \sqrt{3}c_1) = f(c_2) - \sqrt{3}f(c_1) = c_1 - \sqrt{3}c_2$$

$$g(c_3) = g(c_2 - \sqrt{3}c_1) = g(c_2) - \sqrt{3}g(c_1) = c_3 - \sqrt{3}c_2 = c_2 - \sqrt{3}c_1 - \sqrt{3}c_2 = (1 - \sqrt{3})c_2 - \sqrt{3}c_1$$

(c)

$$D_{C(,C)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_{C(,C)}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_{C,B}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(b_1) = f(c_2 + c_3) = c_1 + c_1 - \sqrt{3}c_2 = 2b_2 - \sqrt{3}(\frac{1}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2) = \frac{1}{2}b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}b_1$$

$$f(b_2) = f(c_1) = c_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2$$

$$D_B(f) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_C(f \circ g) = D_C(f) \cdot D_C(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$D_C(g \circ g) = (D_C(g))^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & (1 - \sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

3.2 Darstellungsmatrizen II

Es seien die Basen $B_1 = \{(-1,-2,4),(1,1,1),(3,4,3)\} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C_1 = \{(1,2),(-1,0)\} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie Darstellungsmatrizen $D_{B,C}(\varphi)$ für $\varphi := \varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Es sei die lineare Abb. $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $D_{B_1,C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\psi((3,3,8))$.

Lösung
(a)

$$\varphi(b_1) = A \cdot b_1 = (14 \quad 15)^T = 7,5c_1 - 6,5c_2$$
$$\varphi(b_2) = A \cdot b_2 = (6 \quad 9)^T = 4,5c_1 - 1,5c_2$$
$$\varphi(b_3) = A \cdot b_3 = (18 \quad 28)^T = 14c_1 - 4c_2$$

$$D_{B,C}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 7,5 & 4,5 & 14 \\ -6,5 & -1,5 & -4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$(3 \quad 3 \quad 8)^T = b_1 + b_2 + b_3$$
$$\psi((3 \quad 3 \quad 8)^T) = \psi(b_1) + \psi(b_2) + \psi(b_3) = 1c_1 + 4c_2 + 2c_1 + 5c_2 + 3c_1 + 6c_2 = 6c_1 + 15c_2 = (-9 \quad 12)^T$$

3.3 Basis gesucht

Es sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der reelle Vektorrraum der Polynome vom Grad kleiner 3 mit der kanonischen Basis $E = \{1, x, x^2\}$.

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^3, (a_0 + a_1x + a_2x^2) \mapsto \begin{pmatrix} 9a_0 + 8a_1 + 7a_2 \\ 6a_0 + 5a_1 + 4a_2 \\ 3a_0 + 2a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist eine Basis $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, mit $b_3 = e_1$ und $D_{E,B}(\varphi)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$D_{E,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie b_1, b_2, λ, μ.

b) Begründen Sie, dass B wirklich eine Basis ist.

Lösung
(a) Aus den ersten beiden Spalten von $D_{B,E}(\varphi)$ nehmen wir

$$b_1 = \varphi(x) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \varphi(1) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Als nächstes lesen wir ab, dass für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda \cdot b_1 + \mu \cdot b_2 = \varphi(x^2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dafür lösen wir

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & |7 \\ 5 & 6 & |4 \\ 2 & 3 & |1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & |1 \\ 1 & 0 & |2 \\ 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

Daher sind $\mu = -1$ und $\lambda = 2$.

(b) Mit $b_3 = e_1$ ist B eine Basis, da die b_i linear unabhängig sind. (voller Rang)

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Basiswechsel und Darstellungsmatrizen I (Z 18)

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ eine lineare Abb.
Zusätzlich seien die Basen $B = \{(1 \quad -4 \quad 2), (2 \quad -7 \quad 3), (0 \quad 1 \quad -2)\}$ und $C = \{(4 \quad 7), (-2 \quad -4)\}$ bekannt.

a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{E,B}, S_{B,E}, S_{E,C}, S_{C,E}$ mit E als der Standardbasis.

b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $D_{B,C}(\varphi)$.

Lösung
(a)

$$S_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad S_{E,C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von $S_{B,E} = S_{E,B}^{-1}$ berechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und $S_{C,E} = S_{E,C}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & | & 1 & 0 \\ 7 & -4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 7 & -4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 4 & -2 \\ 0 & 1 & | & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Alternativ für 2×2-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(b) $S_{C,E} = S_{E,C}^{-1}$

$$D_{B,C}(\varphi) = S_{C,E} \cdot D_{E,E}(\varphi) \cdot S_{E,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -1 & 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & -1 \\ -15,5 & -29 & -1,5 \end{pmatrix}$$

3.5 Basiswechsel und Darstellungsmatrizen II

Zusätzlich zur kanonischen Basis $E = \{1, x, x^2\}$ ist die Basis $B = \{x^2 + x + 2; 2x + 1; 7x + 3\}$ gegeben. $\varphi : V \to V$ sei $\varphi(f(x)) = f(x-2) - f'(x) + f(1)$.

a) Zeigen Sie, dass φ eine lin. Abb. ist.

b) Geben Sie die Matrizen $D_E(\varphi), S_{E,B}, S_{B,E}, D_B(\varphi)$ an.

Lösung
(a) Es gilt für alle $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f(x) + g(x)) &= (\lambda f + g)(x-2) - (\lambda f + g)'(x) + (\lambda f + g)(1) = \\ &= \lambda \cdot f(x-2) + g(x-2) - \lambda f'(x) - g'(x) + \lambda f(1) + g(1) \\ &= \lambda\varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\varphi(1) = 1 - 0 + 1 = 2$$
$$\varphi(x) = (x-2) - 1 + 1 = x - 2$$
$$\varphi(x^2) = (x-2)^2 - 2x + 1^2 = x^2 - 6x + 5$$

$$D_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{E,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{B,E}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -11 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D_B(\varphi) = S_{B,E} \cdot D_E(\varphi) \cdot S_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 53 & -20 & -77 \\ -16 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

3.6 Berechnen von Determinanten

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Lösung

a) 11 $III \to III - I - IV: \quad = det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$II \to II + IV: \quad = det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Entwicklung letzte Spalte: $\quad = (-1)^8 \cdot (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 8 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Sarrus: $\quad = (-1) \cdot [(3 - 16) - (14 - 16)] = 11$

b) -23 Entwickung vierte Zeile: $\quad = 1 \cdot det \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

vordere Det., $III \to III - II: \quad det \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Entwicklung dritte Zeile: $\quad = 1 \cdot det \begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Sarrus: $\quad = 1 \cdot [(40 - 24 + 5) - (-30 + 16 + 10)] - 1 \cdot [(-8 - 18) - (12 - 2)] = 1 \cdot 25 - 1 \cdot (-36) = 61$

hintere Det., $III \to III - II: \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Entwicklung dritte Zeile: $\quad = (-1) \cdot det \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Sarrus: $\quad = (-1) \cdot [(8 + 6 - 4) - (24 - 4 + 2)] = (-1) \cdot [10 - 22] = 12$

insgesamt: $det(A) = 1 \cdot 61 - 7 \cdot 12 = -23$

3.7 Determinantenmultiplikationssatz

Eine Matrix $A \in k^{n \times n}$ heißt

(i) nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, mit $A^n = 0$ für $n \geq k$.

(ii) idempotent, wenn $A^2 = A$.

(iii) selbstinvers, wenn $A^2 = I_n$.

Geben Sie jeweils ein Beispiel an für

a) eine nilpotente Matrix, außer der Nullmatrix.

b) eine idempotente Matrix, außer Null- und Einheitsmatrix.

c) eine selbstinverse Matrix, außer der Einheitsmatrix.

Lösung

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.8 Adjunkte

Gegeben seien die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die die Adjunkte C von A und D von B.

b) zur Kontrolle: Berechnen Sie die Produkte $A \cdot C, C \cdot A$.

Lösung

(a)

$$c_{1,1} = -5 \quad c_{1,2} = -(-4) \quad c_{1,3} = 14$$

$$c_{2,1} = -4 \quad c_{2,2} = 2 \quad c_{2,3} = -(-12)$$

$$c_{3,1} = -5 \quad c_{3,2} = -0 \quad c_{3,3} = 20$$

(b)

$$c_{1,1} = -6 \quad c_{1,2} = -3 \quad c_{1,3} = \quad c_{1,4} = -0$$

$$c_{2,1} = -0 \quad c_{2,2} = 0 \quad c_{2,3} = -0 \quad c_{2,4} = 14$$

$$c_{3,1} = -30 \quad c_{3,2} = -15 \quad c_{3,3} = 3 \quad c_{3,4} = -(-26)$$

$$c_{4,1} = -(-30) \quad c_{4,2} = -6 \quad c_{4,3} = -(-18) \quad c_{4,4} = -24$$

3.9 Charakteristisches Polynom, Eigenwerte,Eigenräume

Berechnen Sie jeweils χ_A , die Eigenwerte und die Eigenräume über dem Körper $\mathbb{C}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung
(a)

$$\chi_A = (x-4)\cdot(x-(-2))\cdot(x-(-4))$$
$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, \lambda = -4$$

$$E_4 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{v | v = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C}\} \text{ wegen } \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & |0 \\ 0 & -6 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & -8 & |0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{v | v = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C}\} \text{ wegen } \begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 & |0 \\ 0 & 0 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & -2 & |0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-4} = \langle \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix} \rangle = \{v | v = k \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C}\} \text{ wegen } \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & |0 \\ 0 & 2 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\chi_B = det \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -1 \\ -4 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1) - 4 - [4\cdot(\lambda-2) + 2\cdot(\lambda-1)]$$
$$= (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\cdot(\lambda-1) - 4 - 4\lambda + 8 - 2\lambda + 2$$
$$= \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda - 2 + 6 - 6\lambda$$
$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = (\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-4)$$
$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda = 4$$

$$E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \{v | v = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C}\} \text{ wegen } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & |0 \\ 2 & 1 & 1 & |0 \\ 4 & 2 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = \{v | v = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C}\} \text{ wegen } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & |0 \\ 0 & 3 & 0 & |0 \\ 4 & 2 & 2 & |0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle = \{v | v = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{C}\} \text{ wegen } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & |0 \\ 2 & -2 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

3.10 Matrix diagonalisieren

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie die Eigenräume von A. Geben Sie weiter eine invertierbare Matrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, so dass $S^{-1}AS = D$ gilt.

Lösung
Wir berechnen zuerst χ_A:

$$\chi_A = det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda - 7 & 3 \\ 2 & -4 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

Die Eigenräume sind:

$$E_2 = Kern \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_3 = Kern \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_4 = Kern \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Aus die bauen wir:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.11 Grenzwerte der Matrixeinträge

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $i, j \in 1, 2$ sei $a_{ij}^{(n)}$ der Eintrag in Position (i, j) der Matrix A^n. Berechnen Sie die Matrix $A^\infty \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die in Position (i, j) gerade den Eintrag $\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)}$ haben soll. (Tipp: Diagonalisieren!)

Lösung
Zunächst diagonalisieren wir A, indem wir das charakteristische Polynom χ_A und die Eigenräume berechnen.

$$\chi_A = det \begin{pmatrix} x - 0,3 & -0,1 \\ 0,3 & x - 0,7 \end{pmatrix} = (x - 0,3)(x - 0,7) + 0,03 = x^2 - x + 0,24 = (x - 0,6)(x - 0,4)$$

$$E_{0,6} = Kern \begin{pmatrix} -0,3 & 0,1 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} -0,3 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_{0,4} = Kern \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 \\ -0,3 & 0,3 \end{pmatrix} = Kern \begin{pmatrix} -0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Mit der Basiswechselmatrix

$$S := S_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir:

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,6^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix} \qquad D^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\infty = SD^\infty S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$