Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

Linearkombinationen, Basen, Lineare Abbildungen

2.1 Lineare Unabhängigkeit

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

(a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}-$Vektorraum $\mathbb{R}$

(b) $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$

(c) $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $Abb(\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R})$

(d) $(\cos nx, \sin mx)_{n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Lösung:

(a) Sei $a\cdot 1 + b\cdot\sqrt{2} + c\cdot\sqrt{3} = 0$ mit $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Dann gilt

$$b\cdot\sqrt{2} + c\cdot\sqrt{3} = -a \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

also auch

$$(-a)^2 = 2b^2 + 2bc\cdot\sqrt{6} + 3c^2 \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Gilt $b\neq 0$ und $c\neq 0$, so ist nach 2

$$\sqrt{6} = \frac{(-a)^2 - 2b^2 - 3c^2}{2bc} \in \mathbb{Q},$$

was ein Widerspruch ist. Ist entweder $b\neq 0$ und $c=0$ oder $c\neq 0$ und $b=0$, so folgt aus 1

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ oder } \sqrt{3} = -\frac{a}{c} \in \mathbb{Q},$$

dies ist ebenfalls ein Widerspruch. Also gilt $b=c=0$, woraus nach Gleichung 1 auch $a=0$ folgt. Damit sind $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig.

(b) Nein, es gilt $2\cdot(4,5,6)-(1,2,3)=(7,8,9)$.

(c) Es bezeichne $f_n(x) := \left(\frac{1}{n+x}\right)$. Für eine Summe

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = 0 \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

wollen wir zeigen, dass alle λ_i verschwinden müssen. Da die Summe endlich ist, können wir den Hauptnenner der Brüche bilden. Damit erhält man im Zähler ein Polynom vom Grad $k-1$ in der Variablen x. ein solches Polynom hat maximal $k-1$ Nullstellen. Da $\mathbb{R}^*_+$ aber unendlich viele Elemente besitzt, muss das Polynom im Zähler das Nullpolynom sein. Dies führt aufgrund von $x\in\mathbb{R}^*_+$ zu einem Gleichungssystem in den λ_i, dessen Lösung sich zu $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$ ergibt.

(d) Ja, sie sind linear unabhängig. Es gibt zwar Verknüpfungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, die aus der Schule bekannten Additionstheoreme, jedoch sind dies Verknüpfungen im Ring $Abb(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nicht im Vektorraum über den reellen Zahlen. Einen strengen Beweis kann man mit Hilfe der Fourier-Zerlegungen der Funktionen $\sin(nx)$ und $\cos(mx)$ finden.

2.2 Lineare Abhängigkeit

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$(1,3,4), (3,t,11), (-1,-4,0).$$

Lösung:
Das zur Aufgabe gehörige lineare Gleichungssystem führt auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & t & 11 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix formen wir mittels elementarer Zeilenumformungen um zu

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & t-9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4t-37 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abhängigkeit der drei Vektoren ist gleichbedeutend damit, dass die zweite Zeile der Matrix verschwindet, also $4t - 37 = 0$ oder $t = \frac{37}{4}$.

2.3 Linearkombination

Stellen Sie den Vektor w jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

(a) $w = (6,2,1), v_1 = (1,0,1), v_2 = (7,3,1), v_3 = (2,5,8)$.

(b) $w = (2,1,1), v_1 = (1,5,1), v_2 = (0,9,1), v_3 = (3,-3,1)$.

Lösung:

(a) $w = \frac{35}{48}v_1 + \frac{37}{48}v_2 - \frac{1}{16}v_3$.

(b) $w = -v_1 + v_2 + v_3$.

2.4 Untervektorräume, Kreuzprodukt

(a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Ist $\{u \in \mathbb{R}^3 | u^T v = u^T w = 0\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

(b) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Ist $\{u \in \mathbb{R}^3 | u^T v = u^T w\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

(c) Unter welchen Bedingungen an $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $\{v, w, v \times w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(d) Unter welchen Bedingungen an $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $\{v, w, v \times w\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$?

(e) Sei $v \in \mathbb{R}^3$. Ist $\{w \in \mathbb{R}^3 | v \times w = 0\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

(f) Sei $v \in \mathbb{R}^3$. Ist $\{w \in \mathbb{R}^3 | \|v \times w\| = \|v\|\|w\|\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

Lösung:

(a) Sei $U := \{u \in \mathbb{R}^3 | u^T v = u^T w = 0\}$. Es ist $0^T v = 0^T w = 0$, also $0 \in U$. Seien $u_1, u_2 \in U$: Dann ist $(u_1 + u_2)^T v = u_1^T v + u_2^T v = 0 + 0 = 0$ und $(u_1 + u_2)^T w = u_1^T w + u_2^T w = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$. Sei $u \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$: Dann ist $(\alpha u)^T v = \alpha u^T v = 0 = \alpha u^T w = (\alpha u)^T w \Rightarrow \alpha u \in U$. Insgesamt ist

U also ein UVR. (Alternativ hätte man auch argumentieren können, dass u ein homogenes LGS mit drei Gleichungen erfüllt und Lösungen von homogenen LGS sind UVR.) U ist orthogonal zu den beiden linear unabhängigen Vektoren v und w. Damit ist U ein UVR mit der Dimension $3 - 2 = 1$.

(b) Sei $U := \{u \in \mathbb{R}^3 | u^T v = u^T w\}$. Es ist $0^T v = 0^T w = 0$, also $0 \in U$. Seien $u_1, u_2 \in U$: Dann ist $(u_1 + u_2)^T v = u_1^T v + u_2^T v = u_1^T w + u_2^T w = (u_1 + u_2)^T w \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$.
Sei $u \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$: Dann ist $(\alpha u)^T v = \alpha u^T v = \alpha u^T w = (\alpha u)^T w \Rightarrow \alpha u \in U$. Insgesamt ist U also ein UVR. (Alternativ hätte man auch argumentieren können, dass u ein homogenes LGS mit einer Gleichung $u^T(v - w) = 0$ erfüllt und Lösungen von homogenen LGS sind UVR.) U ist orthogonal zu $v - w \neq 0$ Damit ist U ein UVR mit der Dimension $3 - 2 = 1$.

(c) $B := \{v, w, v \times w\}$ ist genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn v und w linear unabhängig sind (dann spannen v und w ein Parallelogramm auf und damit ist dann $0 \neq v \times w$ linear unabhängig (da orthogonal) zu v und w).

(d) Notwendige Bedingung für eine Orthonormalbasis ist zunächst, dass die Vektoren v und w die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\|v\| = \|w\| = 1 \text{ und } v^T w = 0.$$

Das ist auch hinreichend, da

$$0 = v^T(v \times w) = w^T(v \times w) \text{ und } \|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin\sphericalangle(v, w) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

(e) Es gilt: $v \times w = 0$ genau dann wenn v und w linear abhängig sind. Für $v \neq 0$ ist also $U := \{w \in \mathbb{R}^3 | v \times w = 0\} = \langle v \rangle$ und damit $dim(U) = 1$. Für $v = 0$ ist $v \times w = 0$ für jedes w, also $U := \{w \in \mathbb{R}^3 | v \times w = 0\} = \mathbb{R}^3$ und damit $dim(U) = 3$.

(f) Für $v = 0$ haben wir $U := \{w \in \mathbb{R}^3 | \|v \times w\| = \|v\|\|w\|\} = \mathbb{R}^3$ mit $dim(U) = 3$. Für $v \neq 0$ haben wir wegen $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin\sphericalangle(v, w) = \|v\|\|w\|$:

$$U := \{w \in \mathbb{R}^3 | \|v \times w\| = \|v\|\|w\|\} = \{w \in \mathbb{R}^3 | \sin\sphericalangle(v, w) = 1\} \cup \{0\} = \{w \in \mathbb{R}^3 | v^T w = 0\}.$$

Das ist änlich wie in (a) ein UVR. Die Dimension von U ist $3 - 1 = 2$.

2.5 Lineare Abbildungen

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

(a) Bestimmen Sie $Kern(f)$

(b) Bestimmen Sie $Rang(f)$ und geben sie eine Basis von $Bild(f)$ an.

(c) Untersuchen und begründen Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(d) Gegeben seien folgende Basen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix ${}_C[f]_B$ an.

Lösung:

(a) Wir bestimmen $Kern(f)$, also die Lösungsmenge von dem homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auf Zeilenstufenform gebracht erhalten wir das äquivalente LGS

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an dem wir die (einparametrige) Lösung

$$Kern(f) = Lin \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ablesen.

(b) Wegen $dim\ Kern(f) = 1$ folgt $Rang(f) = 4 - 1 = 3$. Wegen $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ muss $Bild(f) = \mathbb{R}^3$ gelten. Eine Basis von $Bild(f)$ ist somit die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ (oder man wählt drei lineare unabhängige Spaltenvektoren der Matrix).

(c) Wegen $Bild(f) = \mathbb{R}^3$ ist f surjektiv. Wegen $Kern(f) \neq \{0\}$ ist f aber nicht injektiv, somit auch nicht bijektiv.

(d) Wir setzen die Basisvektoren $b_1, ..., b_4$ in f ein und drücken sie als Linearkombination der Vektoren $c_1, ..., c_3$ aus - die Koeffizienten der Linearkombination liegern die entsprechenden Spalten von ${}_C[f]_B$. Es ist:

$$\begin{array}{lcll} {}^t(1,-1,0,1) & \mapsto & {}^t(-1,-3,-5) & = 3c_1 + 1 \cdot c_2 - 5c_3, \\ {}^t(-1,0,1,1) & \mapsto & {}^t(5,0,4) & = 0 \cdot c_1 - 5c_2 + 4c_3, \\ {}^t(1,1,1,0) & \mapsto & {}^t(3,-6,-3) & = 6c_1 - 3c_2 - 3c_3, \\ {}^t(0,-1,1,1) & \mapsto & {}^t(4,-4,-1) & = 4c_1 - 4c_2 - c_3, \end{array}$$

Damit ergibt sich

$${}_C[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -3 & -4 \\ -5 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.6 Linearkombination

Sei V ein reeller Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a + b + c \\
v_2 &= 2a + 2b + 2c - d \\
v_3 &= a - b - e \\
v_4 &= 5a + 6b - c + d + e \\
v_5 &= a - c + 3e \\
v_6 &= a + b + d + e
\end{aligned}$$

Lösung:
Die Dimension des von den fünf Vektoren a, b, c, d, e aufgespannten Raumes ist kleiner oder gleich fünf. Nach dem Austauschsatz ist die Dimension eines Vektorraumes die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren, in unserem Fall höchstens fünf. Also sind die sechs Vektoren $v_1, ..., v_6$ in jedem Falle linear abhängig.

2.7 Basis I

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$\begin{aligned}
v_1 &= (4, 1, 1, 0, -2) \\
v_2 &= (0, 1, 4, -1, 2) \\
v_3 &= (4, 3, 9, -2, 2) \\
v_4 &= (1, 1, 1, 1, 1) \\
v_5 &= (0, -2, -8, 2, -4).
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = span(v_1, ..., v_5)$.

(b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1, ..., v_5$ aus und kombinieren Sie jeweils $v_1, ..., v_5$ daraus linear.

Lösung:

(a) Eine mögliche Basis, die man erhalten kann, ist

$$\begin{aligned}
w_1 &= (1, 1, 1, 1, 1) \\
w_2 &= (0, 1, 4, -1, 2) \\
w_3 &= (0, 0, 9, -7, 0).
\end{aligned}$$

(b) Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
v_3 &= v_1 + 2v_2, \\
v_5 &= -2v_2, \\
v_5 &= v_1 - v_3.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich als mögliche Basen für V aus $v_1, ..., v_5$:

$$\{v_1, v_2, v_4\}$$
$$\{v_1, v_3, v_4\}$$
$$\{v_1, v_4, v_5\}$$
$$\{v_2, v_3, v_4\}$$
$$\{v_3, v_4, v_5\}.$$

Die Darstellungen der jeweils nicht in den Basen enthaltenen v_i ergeben sich aus den oben angegebenen Gleichungen.

2.8 Basis II

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(c) $span(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$

(d) $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$

Lösung:

(a) Eine Basis ist gegeben durch (v_1, v_2) mit $v_1(1, 0, 1)$ und $v_2(0, 1, 0)$.

(b) $v_1 = (3, -1, -5, 0)$ und $v_2 = (-1, 1, 1, -1)$ bilden eine Basis.

(c) Für $V = span(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5)$ ist

$$\mathcal{B} = (t^2, t^2 + 1, t^2 + t, t^7 + t^5)$$

eine Basis. Dazu ist zu zeigen, dass diese Polynome über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind und dass $V = span\mathcal{B}$ gilt. Die zweite Aussage folgt aus

$$t^2 + t + 1 = 1 \cdot (t^2 + t) + 1 \cdot (t^2 + 1) - 1 \cdot t^2.$$

Die Aussage $t^7 + t^5 \notin span(t^2, t^2 + t, t^2 + 1)$ folgt durch Betrachtung der Grade der Polynome. Bleibt also die lineare Unabhängigkeit der drei Polynome t^2, $t^2 + t$, $t^2 + 1$ zu zeigen. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\alpha \cdot t^2 + \beta \cdot (t^2 + t) + \gamma \cdot (t^2 + 1) = 0.$$

Zusammenfassen nach Potenzen von t ergibt

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot t^2 + \beta \cdot t + \gamma \cdot 1 = 0,$$

woraus unmittelbar $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

(d) Eine Basis von

$$V := \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$$

ist gegeben durch

$$(f_r \in V : f_r(x) = \delta_{xr}),$$

wobei δ das Kronecker-Symbol ist. Die lineare Unabhängigkeit der Funktionen f_r ist unmittelbar klar. Ist andererseits $f \in V$ gegeben, so existieren $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, so dass $a_i := f(x_i) \neq 0$ für alle $i = 1, ..., n$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}n\{x_1, ..., x_n\}$. Dann aber gilt $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_{x_i}$.

2.9 Basis III

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V definieren wir

$$h(V) := sup\{n \in \mathbb{N} : \text{es gibt eine Kette } V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{n-1} \subset V_n \text{ von Untervektorräumen } V_i \subset V\}$$

Zeigen Sie $h(V) = dim(V)$.

Lösung:
Die Terminologie dieser Aufgabe findet auch in der algebraischen Geometrie Verwendung, wo die $h(V)$ die Primideale in kommutativen Ringen definiert wird un Höhe heißt. Die hier vorgestellte Höhe eines Vektorraumes ist sozusagen der triviale Fall.
Wir zeigen $dim(V) \leq h(V)$ sowie $dim(V) \geq h(V)$, daraus folgt dann die Gleichheit.
Sei $m := dim(V)$ und $\{v_1, ..., v_m\}$ eine Basis von V. Setzt man $V_0 := \{0\}$ und $V_i := span(v_1, ..., v_i)$ für $1 \leq i \leq m$, so ist

$$V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq ... \subsetneqq V_m$$

eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen der Länge $dim(V)$, also gilt $dim(V) \leq h(V)$.
Sei andererseits

$$V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq ... \subsetneqq V_{n-1} \subsetneqq V_n$$

eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen. Für jedes $0 \leq i \leq n-1$ ist $V_i \subsetneqq V_{i+1}$ ein Untervektorraum. Es folgt, dass $dim(V_i) < dim(V_{i+1})$ für alle $0 \leq i \leq n-1$ gilt. Wegen $0 \leq dim(V_0)$ folgt daraus

$$i \leq dim(V_i) \text{ für alle } 0 \leq i \leq n. \tag{3}$$

Andererseits ist $dim(V_n) \leq m$, daraus folgt

$$dim(V_{n-i}) \leq m - i \text{ für alle } 0 \leq i \leq n. \tag{4}$$

Aus 3 und 4 ergibt sich

$$n - 1 \leq dim(v_{n-1}) \leq m - 1 \text{ und damit } n \leq m.$$

Da dies für jede mögliche Kette gilt, folgt $h(V) \leq dim(V)$.

2.10 Lineare Abbildungen I

Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} F(2,0) &= (0,1) \\ F(1,1) &= (5,2) \\ F(1,2) &= (2,3)? \end{aligned}$$

Lösung:
Es gilt

$$-(2,0) + 4 \cdot (1,1) = 2 \cdot (1,2).$$

Für eine lineare Abbildung F mit $F(2,0) = (0,1), F(1,1) = (5,2)$ und $F(1,2) = (2,3)$ gilt dann

$$\begin{aligned} F(-(2,0) + 4 \cdot (1,1)) &= -F(2,0) + 4 \cdot F(1,1) \\ &= -(0,1) + 4 \cdot (5,2) = (20,7) \\ &\neq (4,6) = 2 \cdot F(1,2) = F(2 \cdot (1,2)), \end{aligned}$$

daher gibt es keine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften.

2.11 Lineare Abbildungen II

Sei $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2)$ und $V = span\mathcal{B} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Betrachten Sie den Endomorphismus $F : V \to V, f \mapsto f'$, wobei f' die erste Ableitung von f bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathcal{B}}(F)$.

(c) Bestimmen Sie Basen von $Kern(F)$ und $Bild(F)$.

Lösung:

(a) Es ist nur die lineare Unabhängigkeit der Elemente aus $\mathcal{B}$ zu zeigen. Seien dazu $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \sin + \lambda_2 \cdot \cos + \lambda_3 \cdot \sin\cdot\cos + \lambda_4 \cdot \sin^2 + \lambda_5 \cdot \cos^2 = 0$$

in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, also die Nullabbildung. Wir wenden sie auf $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3\frac{\pi}{3}, x_4 = \frac{\pi}{2}$ und $x_5 = \frac{2\pi}{3}$ an. Das liefert fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_5 &= 0 \\ \sqrt{0.5}\lambda_1 + \sqrt{0.5}\lambda_2 + 0.5\lambda_3 + 0.5\lambda_4 + 0.5\lambda_5 &= 0 \\ \sqrt{0.75}\lambda_1 + 0.5\lambda_2 + 0.5\sqrt{0.75}\lambda_3 + 0.75\lambda_4 + 0.25\lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\ \sqrt{0.75}\lambda_1 - 0.5\lambda_2 - 0.5\sqrt{0.75}\lambda_3 + 0.75\lambda_4 + 0.25\lambda_5 &= 0, \end{aligned}$$

die wir als Einträge einer Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ \sqrt{0.75} & 0.5 & 0.5\sqrt{0.75} & 0.75 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{0.75} & -0.5 & -0.5\sqrt{0.75} & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

auffassen können. Wegen $rang(A) = 5$ müssen alle $\lambda_i = 0$ sein.

(b) $M_{\mathcal{B}}(F)$ ist bestimmt durch

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{5} a_{ij} v_i \text{ für } j = 1, ..., 5.$$

Bezeichnet $v_1 = \sin$, $v_2 = \cos$, $v_3 = \sin\cdot\cos$, $v_4 = \sin^2$, $v_5 = \cos^2$, so folgt

$$\begin{aligned} F(v_1) &= \cos & &= a_{21}v_2 \\ F(v_2) &= -\sin & &= a_{12}v_1 \\ F(v_3) &= \cos^2 - \sin^2 & &= a_{53}v_5 + a_{43}v_4 \\ F(v_4) &= 2\sin\cdot\cos & &= a_{34}v_3 \\ F(v_5) &= -2\sin\cdot\cos & &= a_{35}v_3. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus den Spalten von $M_{\mathcal{B}}(F)$ bestimmt man eine Basis von $Bild(F)$. Wie man leicht erkennt, sind die vierte und fünfte Spalte von $M_{\mathcal{B}}(F)$ linear abhängig, die ersten vier Spalten jedoch linear unabhängig. Daher ist eine Basis von $Bild(F)$ gegeben durch $(\cos, -\sin, \cos^2 - \sin^2, 2\sin\cos)$. Aus den Spalten vier und fünf von $M_{\mathcal{B}}(F)$ erkennt man, dass $\sin^2 + \cos^2$ im Kern von F liegt, was aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auch sofort nachzuvollziehen ist. Da $dim(Kern(F)) = dim(V) - dim(Bild(F)) = 5 - 4 = 1$ gilt, ist somit $Kern(F) = span(v_4 + v_5)$.

2.12 Lineare Abbildungen III

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ linear mit $F^2 = F$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt mit

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Es gibt Untervektorräume V_1 und V_2 von V mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $F|_{v_1} = id_{v_1}$ sowie $F|_{v_2} = 0$. Insbesondere gilt $F(V_1) \subset V_1$ und $F(V_2) \subset V_2$. Zudem existieren Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Wegen $V = W$ und den obigen Überlegungen können wir sogar $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ wählen. Aus $F|_{v_2} = 0$ folgt $B = 0$, wegen $F|_{v_1} = id_{v_1}$ gilt $A = E_r$, wobei $r = dim(V_1)$ ist.