Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

Linearkombinationen, Basen, Lineare Abbildungen

2.1 Lineare Unabhängigkeit

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

(a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}-$Vektorraum $\mathbb{R}$

(b) $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$

(c) $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $Abb(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

(d) $(\cos nx, \sin mx)_{n,m\in\mathbb{N}n\{0\}}$ in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.2 Lineare Abhängigkeit

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$(1,3,4),(3,t,11),(-1,-4,0).$$

2.3 Linearkombination

Stellen Sie den Vektor w jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

(a) $w = (6,2,1), v_1 = (1,0,1), v_2 = (7,3,1), v_3 = (2,5,8)$.

(b) $w = (2,1,1), v_1 = (1,5,1), v_2 = (0,9,1), v_3 = (3,-3,1)$.

2.4 Untervektorräume, Kreuzprodukt

(a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Ist $\{u \in \mathbb{R}^3 | u^T v = u^T w = 0\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

(b) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Ist $\{u \in \mathbb{R}^3 | u^T v = u^T w\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

(c) Unter welchen Bedingungen an $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $\{v, w, v \times w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(d) Unter welchen Bedingungen an $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist $\{v, w, v \times w\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$?

(e) Sei $v \in \mathbb{R}^3$. Ist $\{w \in \mathbb{R}^3 | v \times w = 0\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

(f) Sei $v \in \mathbb{R}^3$. Ist $\{w \in \mathbb{R}^3 | \|v \times w\| = \|v\|\|w\|\}$ ein Untervektorraum? Welche Dimension hat er?

2.5 Lineare Abbildungen

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 04 & 0 & \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

(a) Bestimmen Sie $Kern(f)$

(b) Bestimmen Sie $Rang(f)$ und geben sie eine Basis von $Bild(f)$ an.

(c) Untersuchen und begründen Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(d) Gegeben seien folgende Basen von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Geben Sie die Darstellungsmatrix ${}_C[f]_B$ an.

2.6 Linearkombination

Sei V ein reeller Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{aligned} v_1 &= a + b + c \\ v_2 &= 2a + 2b + 2c - d \\ v_3 &= a - b - e \\ v_4 &= 5a + 6b - c + d + e \\ v_5 &= a - c + 3e \\ v_6 &= a + b + d + e \end{aligned}$$

2.7 Basis I

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (4, 1, 1, 0, -2) \\ v_2 &= (0, 1, 4, -1, 2) \\ v_3 &= (4, 3, 9, -2, 2) \\ v_4 &= (1, 1, 1, 1, 1) \\ v_5 &= (0, -2, -8, 2, -4). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = span(v_1, ..., v_5)$.

(b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren $v_1, ..., v_5$ aus und kombinieren Sie jeweils $v_1, ..., v_5$ daraus linear.

2.8 Basis II

Geben Sie für folgende Vektorräume jeweils eine Basis an:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(c) $span(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$

(d) $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x \in \mathbb{R}\}$

2.9 Basis III

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V definieren wir

$h(V) := sup\{n \in \mathbb{N} :$ es gibt eine Kette $V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{n-1} \subset V_n$ von Untervektorräumen $V_i \subset V\}$

Zeichen Sie $h(V) = dim(V)$.

2.10 Lineare Abbildungen I

Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(2,0) = (0,1)$$
$$F(1,1) = (5,2)$$
$$F(1,2) = (2,3)?$$

2.11 Lineare Abbildungen II

Sei $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2, \cos^2)$ und $V = span\mathcal{B} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Betrachten Sie den Endomorphismus $F : V \to V, f \mapsto f'$, wobei f' die erste Ableitung von f bezeichnet.

(a) Zeichen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $M_{\mathcal{B}}(F)$.

(c) Bestimmen Sie Basen von $Kern(F)$ und $Bild(F)$.

2.12 Lineare Abbildungen III

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ linear mit $F^2 = F$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt mit

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$