Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

Matrizen und Vektoren, LGS, Gruppen, Vektorräume

1.1 Multiplikation von Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, E := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte.

Lösung:
Die möglichen Produkte der Matrizen lauten:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 12 & -17 \\ 5 & 49 & -20 \\ -6 & -33 & 91 \end{pmatrix} \\
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 & -3 \\ -8 & 8 & 8 & -8 \end{pmatrix} \\
AE &= \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 30 & 55 \\ -41 & -12 \end{pmatrix} \\
BC &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \\
CD &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 64 \\ 7 & -14 & 0 & -56 \end{pmatrix} \\
DC &= (-57).
\end{aligned}$$

1.2 LGS, Matrixeigenschaften

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ und } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av + b.$$

(a) Bestimmen Sie einen Fixpunkt von f, d.h. bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist die Matrix quadratisch?

(c) Ist die Matrix orthogonal?

(d) Ist die Matrix symmetrisch?

(e) Ist die Matrix hermitesch?

Lösung:

(a) Man berechnet die Lösung des LGS $Ax + b = x$, also $(A - \mathbb{1}_2)x = -b$. Die Lösung ergibt sich zu

$$x = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3} \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(b) Ja (2×2-Matrix).

(c) Ja (Man prüft $A^T A = \mathbb{1}_2$).

(d) Nein.

(e) Nein.

1.3 Matrixeigenschaften

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & t \\ 2 & 1 & 2t \\ 1 & 2 & -2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) symmetrisch?

(b) invertierbar?

(c) orthogonal?

Lösung:

(a) A_t ist nur für $t = 1$ symmetrisch.

(b) Es ist

$$det(A) = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 27t = t.$$

Damit ist A genau dann invertierbar, wenn $t \neq 0$.

(c) Ist A_t orthogonal, dann muss insbesondere die letzte Spalte von A_t ein Eigenvektor sein. D.h. $t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$. Für diese beiden Werte von t ist A_t tatsächlich orthogonal, weil die Spalten eine ONB bilden.

1.4 LGS

Gegeben seien folgende erweiterte Koeffizientenmatrizen $(A|b)$ in Zeilenstufenform:

$$a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right), \quad b) \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad c) \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$$d) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad e) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad f) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lesen Sie die Lösung des jeweiligen LGS an der Zeilenstufenform ab, und geben Sie diese an.

Lösung

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 5 \\ & & x_2 & = & 4. \end{array}$$

Hier ist also direkt: $x_2 = 4$, $x_1 = 5$.
Hinweis: Natürlich wären auch andere Bezeichnungen für die Variablen denkbar. Im folgenden bleiben wir aber bei der Konvention, dass die zur i.ten Spalte zugehörige Variable mit x_i bezeichnet wird. Die spezielle Matrix A in diesem Beispiel, wird übrigens als $(2D)$ Einheitsmatrix bezeichnet.

(b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & +x_2 & = & 5 \\ 0x_1 & 2x_2 & = & 4. \end{array}$$

Also haben wir $x_2 = 2$ und $x_1 = \frac{5-x_2}{3} = 1$.

(c) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{cccc} 3x_1 & +2x_2 & = & 1 \\ 0x_1 & +0x_2 & = & 3. \end{array}$$

Die letzte Zeile lautet also $0 = 3$, was in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist. Also hat dieses LGS keine Lösung.

(d) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 5 \\ & x_2 & & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3. \end{array}$$

Wir lesen also direkt ab $x_3 = 3$, $x_2 = 4$, $x_1 = 5$. Auch in diesem Fall hat die Matrix A eine spezielle Form. Sie wird als $(3D)$ Einheitsmatrix bezeichnet.

(e) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{cccl} 3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ & 3x_2 & x_3 & = & 4 \\ & & x_3 & = & 3. \end{array}$$

Somit ergibt sich $x_3 = 3$, $x_2 = \frac{4-x_3}{3} = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{3-3x_3-3x_2}{3} = -\frac{7}{3}$

(f) Die erweiterte Koeffizientenmatrix repräsentiert das LGS

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & & & = & 4 \\ & 4x_2 & & = & 4 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Da die letzte Gleichung immer erfüllt ist und keine Gleichung x_3 enthält, können wir $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 = 1$ und aus der ersten folgt $x_1 = 2$- Es gibt also unendlich viele Lösungen. Diese haben immer die Form $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \lambda$ beliebig.

1.5 LGS II

Lösen Sie die folgenden LGS:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}, \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Stellen Sie dazu das jeweilige LGS in der Form $(A|b)$ dar und bringen Sie deses auf Zeilenstufenform.

Lösung:

(a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftarrow Z_1/2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 3Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 11/2 & 1 & 13/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 11/2 & 1 & 13/2 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - \frac{11}{2} Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9/2 & -9/2 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow -\frac{2}{9} Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ausgeschrieben als LGS bedeutet dies:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3/2x_2 & & & = & -1/2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Rückwärtssubstitution von der letzten Zeile führt auf

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.h. die Lösung ist eindeutig.

(b) Wir erhalten

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftarrow Z_1/2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 4Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3/2x_2 & & & = & -1/2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Rückwärtssubstitution von der vorletzten Zeile führt mit Setzung $x_3 = \lambda_3$ auf

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda_3 \\ 2 - \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

die Lösung ist also nicht eindeutig. (Die Lösung stellt eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ dar.)

1.6 LGS III

Entscheiden Sie, welche der untenstehenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme mit Unbekannten in $\mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort:

(a) Wenn ein LGS nicht lösbar ist, so ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix größer als die Anzahl der Unbekannten des LGS.

(b) Jedes homogene LGS besitzt eine Lösung.

(c) Ein LGS mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.

(d) Jedes homogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat eine nichttriviale Lösung.

Lösung:

(a) Falsch. Beispiel $0x_1 = 1$. In diesem Fall ist der Rang von $(A|b) = (0, 1)$ gleich 1.

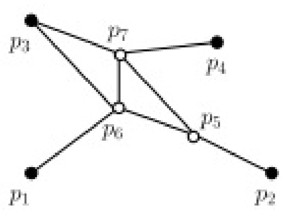
(b) Richtig. Jedes homogene LGS besitzt die triviale Lösung (d.h. alle Unbekannten haben den Wert Null).

(c) Falsch. Eine der Gleichungen könnte ja z.B. $0 = 1$ sein (oder auch $x_1 = 1$, $x_1 = 2$ o.ä.). (Jedoch: Besitzt ein derartiges LGS eine Lösung, dann auch unendlich viele.)

(d) Falsch. Beispiel: $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ hat nur die triviale Lösung.

1.7 LGS IV

Betrachten Sie das dargestellte ebene Netzwerk mit den (Masse-) Punkten $p_1 = (p_{1x}, p_{1y}), ..., p_7 = (p_{7x}, p_{7y})$. Die Punkte $p_1, ..., p_4$ seien fest; p_5, p_6 und p_7 sollen frei schwingen. Desweiteren gelte für alle Federkonstanten $\omega_{ij} = 1$.



(a) Stellen Sie LGS_x und LGS_y für das betrachtete Netzwerk auf und bringen Sie diese jeweils auf Zeilenstufenform. (Die auftretenden Brüche sind leider nicht ganz so einfach.)

(b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand (also die Position der Punkte p_5, p_6, p_7) durch Einsetzen der folgenden konkreten Werte in die jeweiligen linearen Gleichungssysteme:

$$p_1 = (0, 0), p_2 = (5, 0), p_3 = (0, 4), p_4 = (4, 3).$$

Lösung

(a) Für p_{5x} erhalten wir:

$$\begin{aligned} & p_{6x} - p_{5x} + p_{7x} - p_{5x} + p_{2x} - p_{5x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -3p_{5x} + p_{6x} + p_{7x} &= -p_{2x}. \end{aligned}$$

Für p_{6x} erhalten wir:

$$\begin{aligned} & p_{5x} - p_{6x} + p_{7x} - p_{6x} + p_{5x} - p_{6x} + p_{1x} - p_{6x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p_{5x} - 4p_{6x} + p_{7x} &= -p_{1x} - p_{3x}. \end{aligned}$$

Für p_{7x} erhalten wir:

$$\begin{aligned} & p_{3x} - p_{7x} + p_{6x} - p_{7x} + p_{5x} - p_{7x} + p_{4x} - p_{7x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p_{5x} + p_{6x} - 4p_{7x} &= -p_{3x} - p_{4x}. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich LGS_x zu:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -p_{2x} \\ 1 & -4 & 1 & -p_{1x} - p_{3x} \\ 1 & 1 & -4 & -p_{3x} - p_{4x} \end{array}\right).$$

Diese bringen wir jetzt auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -p_{2x} \\ 1 & -4 & 1 & -p_{1x} - p_{3x} \\ 1 & 1 & -4 & -p_{3x} - p_{4x} \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2 \leftarrow 3Z_2 + Z_1 \\ Z_3 \leftarrow 3Z_3 + Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -p_{2x} \\ 0 & -11 & 4 & -3p_{1x} - p_{2x} - 3p_{3x} \\ 0 & 4 & -11 & -p_{2x} - 3p_{3x} - 3p_{4x} \end{array}\right).$$

$$\overset{Z_3 \leftarrow \frac{11}{4}Z_3 + Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -p_{2x} \\ 0 & -11 & 4 & -3p_{1x} - p_{2x} - 3p_{3x} \\ 0 & 0 & -105/4 & -3p_{1x} - \frac{15}{4}p_{2x} - \frac{45}{4}p_{3x} - \frac{33}{4}p_{4x} \end{array}\right).$$

Zusammengefasst: Die Zeilenstufenform von LGS_x ist somit

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -p_{2x} \\ 0 & -11 & 4 & -3p_{1x} - p_{2x} - 3p_{3x} \\ 0 & 0 & -105/4 & -3p_{1x} - \frac{15}{4}p_{2x} - \frac{45}{4}p_{3x} - \frac{33}{4}p_{4x} \end{array}\right).$$

Es ist leicht zu sehen, dass alle Rechenschritte für das LGS_y dieselben sind wie für das LGS_x (wer das nicht glaubt, sollte das nachrechnen). Wir erhalten also als Zeilenstufenform für LGS_y folgendes System:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & -p_{2y} \\ 0 & -11 & 4 & -3p_{1y} - p_{2y} - 3p_{3y} \\ 0 & 0 & -105/4 & -3p_{1y} - \frac{15}{4}p_{2y} - \frac{45}{4}p_{3y} - \frac{33}{4}p_{4y} \end{array}\right).$$

Beachten Sie, dass die Variablen in diesem Fall p_{5y}, p_{6y} und p_{7y} sind.

(b) Betrachten wir zunächst LGS_x: Einsetzen der Werte für p_{1x}, p_{2x}, p_{3x} und p_{4x} liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -11 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{105}{4} & 4\frac{207}{4} \end{array}\right)$$

also $p_{7x} = \frac{69}{35}$. Einsetzen in der zweiten Zeile des LGS liefert $p_{6x} = \frac{41}{35}$. Einsetzen in der ersten Zeile ergibt $p_{5x} = \frac{19}{7}$.

Jetzt zu LGS_y: Einsetzen der Werte für p_{1y}, p_{2y}, p_{3y} und p_{4y} liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{105}{4} & -\frac{279}{4} \end{array}\right)$$

also $p_{7yx} = \frac{93}{35}$. Einsetzen in der zweiten Zeile des LGS liefert $p_{6y} = \frac{72}{35}$. Einsetzen in der ersten Zeile ergibt $p_{5y} = \frac{11}{7}$.
Insgesamt ergibt sich also der Gleichgewichtszustand

$$\begin{aligned} p_5 &= (p_{5x}, p_{5y}) = (\frac{19}{7}, \frac{11}{7}), \\ p_6 &= (p_{6x}, p_{6y}) = (\frac{41}{35}, \frac{72}{35}), \\ p_7 &= (p_{7x}, p_{7y}) = (\frac{69}{35}, \frac{93}{35}). \end{aligned}$$

1.8 LGS V

Zeigen Sie, dass das folgende LGS (über $\mathbb{R}$) nur für $\eta = 1$ oder $\eta = 2$ Lösungen besitzt und geben Sie in beiden Fällen alle Lösungen an:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & \eta \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & = & \eta^2. \end{array}$$

Lösung:
Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \eta \\ 1 & 4 & 10 & \eta^2 \end{array}\right)$$

Diese bringen wir auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \eta \\ 1 & 4 & 10 & \eta^2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} z_2 \leftarrow z_2 - z_1 \\ z_3 \leftarrow z_3 - z_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \eta - 1 \\ 0 & 3 & 9 & \eta^2 - 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \eta - 1 \\ 0 & 3 & 9 & \eta^2 - 1 \end{array}\right) \quad \overset{Z_3 \leftarrow Z_3 - 3Z_2}{\rightsquigarrow} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \eta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2 - 3\eta + 2 \end{array}\right).$$

Die letzte Zeile der Matrix bedeutet $0 = \eta^2 - 3\eta + 2$. Somit ist das LGS nur lösbar für Werte von η mit $\eta^2 - 3\eta + 2 = 0$. Es gilt
$$\eta^2 - 3\eta + 2 = (\eta - 1)(\eta - 2).$$

Somit können nur Lösungen des LGS für den Fall $\eta = 1$ und $\eta = 2$ existieren. In jedem Fall kann x_3 frei gewählt werden, d.h. wir setzen $x_3 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir lesen an der Zeilenstufenform ab:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \lambda, \\
x_2 &= \eta - 1 - 3\lambda, \\
x_1 &= 1 - x_2 - x_3 = 1 - \eta + 1 + 3\lambda - \lambda = 2 - \eta + 2\lambda
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \eta \\ \eta - 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda.$$

Konkret erhalten wir also die (unendlich vielen) Lösungen für den Fall $\eta = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda,$$

und (unendlich vielen) Lösungen für den Fall $\eta = 2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda.$$

1.9 LGS VI

Geben Sie Beispiele für $a, b \in \mathbb{R}$ an (mit Begründung), so dass das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt:

$$\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & x_2 & = & 3 \\
4x_1 & + & ax_2 & = & b.
\end{array}$$

Lösung
Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & a & b \end{array}\right).$$

Zeilenstufenform ($Z_2 \leftarrow Z_2 - 4Z_1$):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & a-4 & b-12 \end{array}\right).$$

(a) Keine Lösung: Dafür muss $rang(A|b) > rang(A)$ sein. Das gilt z.B. für $a - 4 = 0$ und $b - 12 \neq 0$. Also z.B. für $a = 4$ und $b = 8$ gibt es keine Lösung.

(b) Genau eine Lösung: Es muss gelten $rang(A|b) = rang(A)$ und $rang(A) = n = 2$, wobei n die Anzahl der Variablen im LGS bezeichnet. Etwa mit $a - 4 \neq 0$, z.B. $a = 5$, $b = 13$: $x_2 = 1$, $x_1 = 2$.

(c) Unendlich viele Lösungen: Es muss gelten $rang(A|b) = rang(A)$ und $rang(A) < n = 2$. Das erhalten wir z.B. durch eine Nullzeile, also $a - 4 = 0$ und $b - 12 = 0$. Also für $a = 4$, $b = 12$ erhalten wir die Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda,$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

1.10 Gruppen

Sei G eine Gruppe mit $aa = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Lösung:
Die Behauptung lautet $ab = ba$ für alle $a, b \in G$. Seien $a, b \in G$ beliebig. Nach der Voraussetzung gilt wegen der Eindeutigkeit von inversen Elementen $a = a^{-1}$ und $b = b^{-1}$ sowie $ab = (ab)^{-1}$. Daraus folgt

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba,$$

also $ab = ba$, was zu beweisen war.

1.11 Untervektorraum I

Gegeben sei ein homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^n$. Zeigen Sie: Die Lösungsmenge $U = \{x \in K^n | Ax = 0\}$ ist ein Untervektorraum von K^n.

Lösung:
Wir überprüfen direkt die Eigenschaften eines Unterraums:

(a) $U \neq \emptyset$: Homogene Gleichungssysteme besitzen stets die triviale Lösung, deswegen is $0 \in U \neq \emptyset$.

(b) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$: Gegeben $u = (u_1, ..., u_n)^T$, $v = (v_1, ..., v_n) \in U$, also $Au = Av = 0$, d.h.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = 0, \text{ für } i = 1, ..., m$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = 0, \text{ für } i = 1, ..., m.$$

Dann ist

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j + v_j), \text{ für } i = 1, ..., m.$$

Das bedeutet aber, dass $u + v$ Lösungen des LGS und somit $u + v \in U$ ist.

(c) $u \in U, a \in K \Rightarrow \alpha u \in U$: Sei $u \in U, a \in K$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha u_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} u_j = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \alpha \cdot 0 = 0,$$

also $\alpha u \in U$.

1.12 Untervektorraum II

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(c) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(d) $\{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$

(f) $\{a \in M(m \times n; \mathbb{R}) : A$ ist in Zeilenstufenform$\} \subset M(m \times n; \mathbb{R})$.

Lösung:

(a) Es ist

$$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zu zeigen sind die Eigenschaften eines Untervektorraums:

UV_1 $(0, 0, 0) \in W$, also $W \neq \emptyset$

UV_2 Es seien $v = (v_1, v_2, v_3) \in W$ und $w = (w_1, w_2, w_3) \in W$. Dann gilt

$$v = (v_1, v_1, \frac{1}{2}v_1), w = (w_1, w_1, \frac{1}{2}w_1),$$

also

$$v + w = (v_1 + w_1, v_1 + w_1, \frac{1}{2}(v_1 + w_1)) \in W$$

UV_3 Es seien $v = (v_1, v_2, v_3) \in W$ und $\lambda \in K$. Es ist

$$v = (v_1, v_1, \frac{1}{2}v_1),$$

also

$$\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_1, \frac{1}{2}\lambda v_1) \in W$$

Also ist W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

(b) Nun ist $W := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Für alle $x \in \mathbb{R}n0$ gilt $x^2 > 0$ und $x^4 > 0$, woraus folgt, dass für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 n(0, 0)$ gerade $x_1^2 + x_2^4 > 0$ gilt. Also ist $W = \{(0, 0)\}$ und die Bedingungen UV_1 und UV_2 sind trivialerweise erfüllt.

(c) Die Menge $W := \{(\mu+\lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist kein Untervektorraum. Zwar gelten UV_1 und UV_2, jedoch ist UV_3 nicht erfüllt. Das sieht man wie folgt: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda^2 \geq 0$. Wähle $\lambda = 1, \mu = 0, \alpha = -1$. Dann ist $\alpha \cdot (\mu + \lambda, \lambda^2) = (-1) \cdot (1, 1) = (-1, -1) \notin W$.

(d) $W := \{f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$ ist die Nullabbildung sicherlich in W enthalten; das zeigt UV_1. Die Eigenschaft UV_2 folgt für $f, g \in W$ aus

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x).$$

Schließlich folgt UV_3 aus

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(-x) = (\lambda f)(-x)$$

für alle $f \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Also ist W ein Untervektorraum von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(e) Wie bereits in Teil c) gelten für $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$ die Eigenschaften UV_1 und UV_2, jedoch nicht UV_3. Für $v = (2, 1, 1) \in W$ und $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ folgt

$$\lambda \cdot v = (-2, -1, -1) \notin W, \text{ da } x_1 = -2 < -1 = x_2.$$

W ist also kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$

(f) Die Menge $W := \{a \in M(m \times n; \mathbb{R}) : A \text{ ist in Zeilenstufenform}\}$ ist kein Untervektorraum von $M(m \times n; \mathbb{R})$. Anders als in Aufgabe c) und e) ist hier bereits die Summe zweier Vektoren im Allgemeinen nicht mehr in W enthalten. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$$

ist

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht in W. Also ist W kein Untervektorraum.

1.13 Vektorraum

Ist X eine nichtleere Menge, V ein $K-$Vektorraum und $Abb(X, V)$ die Menge aller Abbildungen von X nach V, so ist auf $Abb(X, V)$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),$$

eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt.
Zeigen Sie, dass $Abb(X, V)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem $K-$Vektorraum wird.

Lösung:
Es sind die Eigenschaften V_1 und V_2 zu zeigen. Für V_1 sind die Gruppenaxiome G_1 und G_2 nachzuweisen. G_1 ist dabei klar.
Das Nullelement ist die Abbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in X$, das zur Abbildung $f \in Abb(X, V)$ negative Element ist gegeben durch g mit $g(x) = -f(x)$ für alle $x \in X$, wobei für $f(x) \in V$ auch $-f(x) \in V$ gilt, da V ein Vektorraum ist. Die Kommutativität von $Abb(X, V)$ folgt aus der Kommutativität von V als Gruppe, denn für alle $g \in Abb(X, V)$ gilt

$$(f + g)(x))f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Auch die Eigenschaft V_2 folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für V :

$$((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda + \mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x)$$

für alle $f, g \in Abb(X, V)$ und alle $x \in X$.