Übungen zum Ferienkurs Lineare Algebra WS 14/15

Matrizen und Vektoren, LGS, Gruppen, Vektorräume

1.1 Multiplikation von Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, E := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte.

1.2 LGS, Matrixeigenschaften

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ und } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av + b.$$

(a) Bestimmen Sie einen Fixpunkt von f, d.h. bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist die Matrix quadratisch?

(c) Ist die Matrix orthogonal?

(d) Ist die Matrix symmetrisch?

(e) Ist die Matrix hermitesch?

1.3 Matrixeigenschaften

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & t \\ 2 & 1 & 2t \\ 1 & 2 & -2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) symmetrisch?

(b) invertierbar?

(c) orthogonal?

1.4 LGS

Gegeben seien folgende erweiterte Koeffizientenmatrizen $(A|b)$ in Zeilenstufenform:

$$a)\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right), \qquad b)\quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right), \qquad c)\quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$$d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad e)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad f)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lesen Sie die Lösung des jeweiligen LGS an der Zeilenstufenform ab, und geben Sie diese an.

1.5 LGS II

Lösen Sie die folgenden LGS:

$$\text{a)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}, \qquad \text{b)} \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Stellen Sie dazu das jeweilige LGS in der Form $(A|b)$ dar und bringen Sie deses auf Zeilenstufenform.

1.6 LGS III

Entscheiden Sie, welche der untenstehenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme mit Unbekannten in $\mathbb{R}$ wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort:

(a) Wenn ein LGS nicht lösbar ist, so ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix größer als die Anzahl der Unbekannten des LGS.

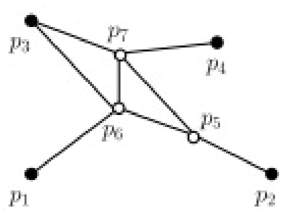
(b) Jedes homogene LGS besitzt eine Lösung.

(c) Ein LGS mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.

(d) Jedes homogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat eine nichttriviale Lösung.

1.7 LGS IV

Betrachten Sie das dargestellte ebene Netzwerk mit den (Masse-) Punkten $p_1 = (p_{1x}, p_{1y}), ..., p_7 = (p_{7x}, p_{7y})$. Die Punkte $p_1, ..., p_4$ seien fest; p_5, p_6 und p_7 sollen frei schwingen. Desweiteren gelte für alle Federkonstanten $\omega_{ij} = 1$.



(a) Stellen Sie LGS_x und LGS_y für das betrachtete Netzwerk auf und bringen Sie diese jeweils auf Zeilenstufenform. (Die auftretenden Brüche sind leider nicht ganz so einfach.)

(b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand (also die Position der Punkte p_5, p_6, p_7) durch Einsetzen der folgenden konkreten Werte in die jeweiligen linearen Gleichungssysteme:

$$p_1 = (0, 0), p_2 = (5, 0), p_3 = (0, 4), p_4 = (4, 3).$$

1.8 LGS V

Zeigen Sie, dass das folgende LGS (über $\mathbb{R}$) nur für $\eta = 1$ oder $\eta = 2$ Lösungen besitzt und geben Sie in beiden Fällen alle Lösungen an:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & \eta \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & = & \eta^2. \end{array}$$

1.9 LGS VI

Geben Sie Beispiele für $a, b \in \mathbb{R}$ an (mit Begründung), so dass das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & ax_2 & = & b. \end{array}$$

1.10 Gruppen

Sei G eine Gruppe mit $aa = e$ für alle $a \in G$, wobei e das neutrale Element von G bezeichnet. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

1.11 Untervektorraum I

Gegeben sei ein homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^n$. Zeigen Sie: Die Lösungsmenge $U = \{x \in K^n | Ax = 0\}$ ist ein Untervektorraum von K^n.

1.12 Untervektorraum II

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(c) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

(d) $\{f \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$

(f) $\{A \in M(m \times n; \mathbb{R}) : A \text{ ist in Zeilenstufenform}\} \subset M(m \times n; \mathbb{R})$.

1.13 Vektorraum

Ist X eine nichtleere Menge, V ein $K-$Vektorraum und $\mathit{Abb}(X, V)$ die Menge aller Abbildungen von X nach V, so ist auf $\mathit{Abb}(X, V)$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \ (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),$$

eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt.
Zeigen Sie, dass $\mathit{Abb}(X, V)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem $K-$Vektorraum wird.