Ferienkurs Quantenmechanik - Probeklausur Lösungsvorschlag

Sommersemester 2013

Fabian Jerzembeck und Christian Kathan
Fakultät für Physik
Technische Universität München

21. Oktober 2014

Probeklausur

Aufgabe 1 Variationsverfahren
Für das gegebene Potential

$$V(x) = \begin{cases} fx & \text{für } x > 0 \\ \infty & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

führe man das Variationsverfahren unter Verwendung der Versuchsfunktion $u(x)$ mit dem Variationsparameter α durch:

$$u(x) = xe^{-\alpha x}$$

Geben Sie die dazugehöige minimierte Energie an.

Geben Sie ein Beispiel an, wo dieses Potential in der Realität auftauchen kann.

Hinweis: Die Formel $\int_0^\infty dx x^n e^{-px} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ kann hilfreich sein.
Weiterhin gilt: $f, \alpha > 0$, reell.

Lösung:
Für das zu minimierende Energiefunktional gikt:

$$E(\alpha) = \frac{\langle u(x)|\hat{H}|u(x)\rangle}{\langle u(x)|u(x)\rangle}$$

Wobei wir zunächst die Testfunktion normieren müssen

$$\langle u(x)|u(x)\rangle = \int_0^\infty dx x^2 e^{-2\alpha x} = \frac{1}{4\alpha^3}$$

und dann den Erwartungsert

$$\langle u(x)|\hat{H}|u(x)\rangle = \int_0^\infty dx x e^{-\alpha x}\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + fx\Big) x e^{-\alpha x}$$

$$= \frac{\hbar^2\alpha}{m}\int_0^\infty dx x e^{-2\alpha x} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\int_0^\infty dx x^2 e^{-2\alpha x} + f\int_0^\infty dx x^3 e^{-2\alpha x}$$

$$= \frac{\hbar^2}{8m\alpha} + \frac{3f}{2\alpha}$$

Das Minimieren liefert:

$$\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \left(\frac{3mf}{2\hbar^2}\right)^{1/3}$$

$$E(\alpha_0) = \frac{9}{4}\left(\frac{2f^2\hbar^2}{3m}\right)^{1/3}$$

Wählen wir $f = mg$, so handelt es such um die potentielle Energie eines Teilchens im homogenen Gravitaionsfeld der Erde. Das Teilchen wird bei $x = 0$ von einer ideal reflextierenden Ebene zurückgeworfen.

Aufgabe 2 Spin

Ein Teilchen mit Spin $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\cdot\sigma$ befinde sich in einem konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\cdot e_z$. Eine Messung der Spinprojektion in x-Richtung zur Zeit $t = 0$ soll den Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ ergeben.

(a) Wie lautet der Hamiltonoperator der Wechselwirkung des magnetischen Moments mit dem Magnetfeld? (Korrespondenzprinzip!)

(b) Was ist der Zustand des Spins $|\Psi_0\rangle$ zur Zeit $t = 0$ ausgedrückt durch die Eigenzustände $|\pm\rangle$ von σ_z?

(c) Berechnen Sie mithilfe des Zeitentwicklungsoperators $U_t = exp[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}]$ den Zustand $|\Psi_t\rangle$ zur Zeit t. Wann befindet sich der Spin wieder im Ausgangszustand?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei einer Messung in x-Richtung zur Zeit t den Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$?

Lösung:
a) Der Hamilton-Operator lautet

$$H = -\mu \cdot B = -\mu_B \sigma_z B$$

b) Der Zustand des Spins $|\Psi_0\rangle$ zur Zeit $t = 0$ in x-Richtung mit dem Eigenwert $+\hbar/2$ ist

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{in\ x-Eigenzuständen} \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|+\rangle + |-\rangle \Big)$$

c) Für die Zeitentwicklung gilt

$$|\Psi_t\rangle = U_t |\Psi_0\rangle$$

Mit dem Zeitentwichlungsoperator und der Betrachtung eines diagonalen Matrixexponential folgt

$$U_t = \exp\left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right] = \exp\left[\frac{+i\mu_B \sigma_z t}{\hbar}\right] = \begin{pmatrix} e^{+\frac{i\mu_B Bt}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\mu_B Bt}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$|\Psi_t\rangle = \begin{pmatrix} e^{+\frac{i\mu_B Bt}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\mu_B Bt}{\hbar}} \end{pmatrix} |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{+\frac{i\mu_B Bt}{\hbar}} |+\rangle + e^{-\frac{i\mu_B Bt}{\hbar}} |-\rangle)$$

Somit befindet sich das System nach $t = 2\pi/\omega$ wieder im Ausgangszustand und ω ist gleich $\omega = \frac{\mu_B B}{\hbar}$.

d) Der Eigenzustand zu $-\hbar/2$ in x-Richtung ausgedrückt in z ist

$$|-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle)$$

Die Wahrscheinlichkeit zu einer Zeit t den Eingenwert $-\hbar/2$ zu finden ist

$$\Big| \langle -_x | \Psi_t \rangle \Big|^2 = \left| \frac{1}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right|^2 = |i \sin(\omega t)|^2 = \sin^2(\omega t)$$

Aufgabe 3 Dreidimensionaler harmonischer Oszillator
Der Hamilton-Operator des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)-E\right]\Psi(x,y,z)=0$$

(a) *Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung, indem Sie mit dem Ansatz*

$$\Psi(\vec{r})=\Psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

eine Separation der partiellen Differentialgleichung in drei gewöhnliche Differentialgleichungen für $X(x), Y(y), Z(z)$ vornehmen.

(b) *Wie lauten die Energie-Eigenfunktionen und die Energie-Eigenwerte des betrachteten Systems?*

Lösung:
a) Wir verwenden die sog. Separation der variablen, d.h. den Ansatz $\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung liefert:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(X''(x)Y(y)Z(z)+X(x)Y''(y)Z(z)+X(x)Y(y)Z''(z)\Big)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)X(x)Y(y)Z(z)-EX(x)Y(y)Z(z)\right]=0$$

Hieraus folgt

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2}_{\textit{nur abhängig von } x}=\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}\right)+\frac{1}{2}m\omega^2(y^2+z^2)+E}_{\textit{nur abhängig von } y \textit{ und } z}$$

Das wiederum bedeutet, dass beide Seiten konstant sein müssen. Diese Konstanten nennen wir β_x. Wir erhalten bei dreimaliger Anwendung dieses Arguments folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2&=\beta_x\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{1}{2}m\omega^2y^2&=\beta_y \qquad\Longrightarrow\qquad E=\beta_x+\beta_y+\beta_z\\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{Z''(z)}{Z(z)}+\frac{1}{2}m\omega^2z^2&=\beta_z\end{aligned} \tag{1}$$

Hiermit ist das Problem auf drei eindimensionale Oszillatoren reduziert.

b) Die Lösung des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$X_{n_x}(x) = \sqrt{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\frac{1}{2^{n_x}n_x!}}H_{n_x}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right]$$

mit $\beta_x = \hbar\omega(n_x + 1/2)$ und $n_x = 0, 1, 2, ...$

Hieraus folgt für die Energie-Eigenfunktionen:

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(\vec{r}) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{3/4}\frac{H_{n_x}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)H_{n_y}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y\right)H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}z\right)}{\sqrt{2^{n_x+n_y+n_z}n_x!n_y!n_z!}}\exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right]$$

mit

$$E = \beta_x + \beta_y + \beta_z = \hbar\omega\Big(n_x + n_y + n_z + 3/2\Big).$$