Ferienkurs Quantenmechanik - Probeklausur

Sommersemester 2014

Fabian Jerzembeck und Christian Kathan
Fakultät für Physik
Technische Universität München

12. September 2014

Probeklausur

Aufgabe 1 Variationsverfahren

Für das gegebene Potential

$$V(x) = \begin{cases} fx & \text{für } x > 0 \\ \infty & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

führe man das Variationsverfahren unter Verwendung der Versuchsfunktion $u(x)$ *mit dem Variationsparameter* α *durch:*

$$u(x) = xe^{-\alpha x}$$

Geben Sie die dazugehöige minimierte Energie an.

Geben Sie ein Beispiel an, wo dieses Potential in der Realität auftauchen kann.

Hinweis: Die Formel $\int_0^\infty dx x^n e^{-px} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ *kann hilfreich sein.*
Weiterhin gilt: $f, \alpha > 0$*, reell.*

Aufgabe 2 Spin

Ein Teilchen mit Spin $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2} \cdot \sigma$ *befinde sich in einem konstanten Magnetfeld* $\boldsymbol{B} = B \cdot e_z$. *Eine Messung der Spinprojektion in* x*-Richtung zur Zeit* $t = 0$ *soll den Eigenwert* $+\frac{\hbar}{2}$ *ergeben.*

(a) *Wie lautet der Hamiltonoperator der Wechselwirkung des magnetischen Moments mit dem Magnetfeld? (Korrespondenzprinzip!)*

(b) *Was ist der Zustand des Spins* $|\Psi_0\rangle$ *zur Zeit* $t = 0$ *ausgedrückt durch die Eigenzustände* $|\pm\rangle$ *von* σ_z*?*

(c) *Berechnen Sie mithilfe des Zeitentwicklungsoperators* $U_t = exp[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}]$ *den Zustand* $|\Psi_t\rangle$ *zur Zeit* t*. Wann befindet sich der Spin wieder im Ausgangszustand?*

(d) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei einer Messung in* x*-Richtung zur Zeit* t *den Eigenwert* $\frac{\hbar}{2}$*?*

Aufgabe 3 Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamilton-Operator des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) - E \right] \Psi(x, y, z) = 0$$

(a) *Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung, indem Sie mit dem Ansatz*

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

eine Separation der partiellen Differentialgleichung in drei gewöhnliche Differentialgleichungen für $X(x), Y(y), Z(z)$ *vornehmen.*

(b) *Wie lauten die Energie-Eigenfunktionen und die Energie-Eigenwerte des betrachteten Systems?*