Ferienkurs Quantenmechanik - Aufgaben

Sommersemester 2014

Fabian Jerzembeck und Christian Kathan
Fakultät für Physik
Technische Universität München

10. September 2014

Drehimpuls und Spin

Drehimpuls

Aufgabe 1 **(**)** *Beweise die Relationen*

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z, \quad [L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm, \quad [L^2, L_\pm] = 0$$

mithilfe von den Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls: $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

Lösung:

$$\begin{aligned}
[L_+, L_-] &= [L_x + iL_y, L_x - iL_y] = \underbrace{[L_x, L_x]}_{=0} + i\underbrace{[L_y, L_x]}_{=-i\hbar L_z} - i\underbrace{[L_x, L_y]}_{=i\hbar L_z} + \underbrace{[L_y, L_y]}_{=0} \\
&= 2\hbar L_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_z, L_\pm] &= [L_z, L_x \pm iL_y] = \underbrace{[L_z, L_x]}_{i\hbar L_y} \pm i\underbrace{[L_z, L_y]}_{=-i\hbar L_x} \\
&= \pm\hbar L_x + i\hbar L_y = \pm\hbar(L_x \pm iL_y) = \pm\hbar L_\pm
\end{aligned}$$

$$[L^2, L_\pm] = \underbrace{[L^2, L_x]}_{=0} \pm i\underbrace{[L^2, L_y]}_{=0} = 0$$

Aufgabe 2 **(*)** *Wir bezeichnen die simultanen Eigenkets von L^2 und L_z mit $|l,m\rangle$, $l \in \mathbb{N}$ und $-l \leq m \leq +l$. Für die Auf- und Absteigeoperatoren des Drehimpulses $L_\pm = L_x \pm iL_y$ gilt*

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|l,m\pm 1\rangle$$

Drücke L_x und L_y durch $L_\pm$ aus und zeige die Relationen

$$\langle l,m|L_xL_y + L_yL_x|l,m\rangle = 0$$

$$\langle l,m|L_x^2 - L_y^2|l,m\rangle = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\langle l,m|L_xL_y + L_yL_x|l,m\rangle &= \frac{1}{4i}\langle l,m|\left(\Big[(L_+ + L_-)(L_+ - L_-) + (L_+ - L_-)(L_+ + L_-)\Big]|l,m\rangle\right)\\
&= \frac{1}{4i}\langle l,m|\left(\Big[2L_+^2 + 2L_-^2 \underbrace{-L_+L_- + L_-L_+ + L_+L_- - L_-L_+}_{=0}\Big]|l,m\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2i}\langle l,m|\left(L_+^2|l,m\rangle\right) + \frac{1}{2i}\langle l,m|\left(L_-^2|l,m\rangle\right) = 0
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt, da $L_+^2|l,m\rangle \sim |l,m+2\rangle$ und $\langle l,m|l,m+2\rangle = 0$ wegen Orthogonalität der Eigenfunktionen. L_-^2 analog.

$$\begin{aligned}
\langle l,m|L_x^2 - L_y^2|l,m\rangle &= \langle l,m|\left(\Big[\frac{1}{2^2}(L_+ + L_-)(L_+ + L_-) - \frac{1}{(2i)^2}(L_+ - L_-)(L_+ - L_-)\Big]|l,m\rangle\right)\\
&= \frac{1}{4}\langle l,m|\left(\Big[(L_+ + L_-)(L_+ + L_-) + (L_+ - L_-)(L_+ - L_-)\Big]|l,m\rangle\right)\\
&= \frac{1}{4}\langle l,m|\left(\Big[2L_+^2 + 2L_-^2 \underbrace{L_+L_- + L_-L_+ - L_+L_- - L_-L_+}_{=0}\Big]|l,m\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\langle l,m|\left(L_+^2|l,m\rangle\right) + \frac{1}{2}\langle l,m|\left(L_-^2|l,m\rangle\right) \underset{\text{siehe a)}}{=} 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **(*)** *Der Hamiltonoperator eines starren Rotators in einem Magnetfeld ist gegeben durch*

$$H = \frac{L^2}{2\Theta} + \gamma\vec{L}\cdot\vec{B}.$$

Dabei ist $\vec{L}$ und $\vec{B}$ das angelegte Magnetfeld. Θ (das Trägheitsmoment) und γ (der gyromagnetische Faktor) sind Konstanten. Das Magnetfeld ist konstant in z-Richtung: $\vec{B} = B\vec{e}_z$.
Wie lauten Energieeigenzustände des Systems? Berechne die Energieeigenwerte.

Lösung:
Es ist

$$H = \frac{L^2}{2\Theta} + \gamma L_z B.$$

Wir kennen simultane Eigenzustände von den Operatoren L^2 und L_z, nämlich genau unsere Kugelflächenfunktionen Y_{lm}. Dementsprechend sind das unsere Eigenzustände. Unsere Eigenenergien sind dann

$$E_{lm} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\Theta} + \gamma m \hbar B.$$

Aufgabe 4 **(**)** *Wir betrachten ein System in einem Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ mit Eigenwert $2\hbar^2$, d.h. $l = 1$.*

1. *Bestimmen Sie, ausgehend von der bekannten Wirkung von Auf- und Absteigeroperatoren $L_\pm$, die Matrixdarstellung von L_x,L_y und L_z bezüglich der Standardbasis $|l, m\rangle$.*

2. *Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, ausgedrückt in Kugelkoordinaten mit θ und φ, für ein System in einem Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ und L_x mit den Quantenzahlen $l = 1$ und $m_x = 1$.*

Lösung:

1. Zunächst bemerken wir, dass die Matrixdarstellungen bezüglich des 3 dimensionalen Unterraumes, der durch die Basis $\{|l = 1, m\rangle\}_{m=-1,0,1}$ aufgespannt, zu bestimmen sind. Die gegebene Basis besteht aus Eigenzuständen zu L_z, d.h. $L_z |1, m\rangle = \hbar m |1, m\rangle$. Die darstellende Matrix des Operators L_z ist damit diagonal

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Wirkungen von L_x, y auf die Eigenzustände von L_z, also die $|l, m\rangle$, erhalten wir durch Verwendung von $L_\pm$. Dabei ist bekannt, dass

$$\begin{aligned}
&L_+ |1, 1\rangle = 0 \\
&L_+ |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 1\rangle \\
&L_+ |1, -1\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle \quad \text{und analog} \\
&L_- |1, 1\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, 0\rangle \\
&L_- |1, 0\rangle = \hbar\sqrt{2} |1, -1\rangle \\
&L_- |1, -1\rangle = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir die Beziehung

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,|l,m\pm 1\rangle$$

benutzt haben. Bei Verwendung der Definition von Auf- und Absteiger und Invertierung zu $L_x = (L_+ + L_-)/2$ und $L_y = i(L_+ - L_-)/2$ liefert dies uns die gesuchte Matrixdarstellungen zu

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

und

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Diagonalisierung (der Matrix) von L_x liefert die Eigenzustände von L_x bezüglich unserer gewählten Basis aus Eigenzuständen von L_z, in Dirac-Notation zu

$$|1,\pm\rangle_x = \frac{1}{2}(|1,1\rangle \pm \sqrt{2}\,|1,0\rangle + |1,-1\rangle), \quad \text{mit Eigenwert } \pm\hbar$$
$$|1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle), \quad \text{mit Eigenwert } 0.$$

Die gesuchte Eigenfunktion $\psi_{m_x=1}(\theta,\varphi)$ im Ortsraum ist damit

$$\psi_{m_x=1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\left(Y_1^1(\theta,\varphi) + Y_1^{-1}(\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1^0(\theta,\varphi) =$$
$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(\cos\theta - i\sin\theta\sin\varphi).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\theta,\varphi)$ lässt sich daher zu

$$\rho(\theta,\varphi) = |\psi_{m_x=1}(\theta,\varphi)|^2 = \frac{3}{8\pi}(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi)$$

berechnen.

Probleme in 3 Dimensionen

Aufgabe 5 **(*)** *Die normierten Wasserstoffeigenfunktionen für maximalen Bahndrehimpuls $l = n-1$ sind von der Form:*

$$\Psi_{n,n-1,m}(\vec{r}) = \frac{u_{n,n-1}(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \quad u_{n,n-1}(r) = \sqrt{\frac{2}{n(2n)!a_B}} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^n e^{-\frac{r}{na_B}}$$

mit $a_B = \frac{\hbar}{m_e \alpha c}$.

a) *Bestimme den Abstand* r_{max} *an dem die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte* $P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2$ *maximal wird und vergleiche* r_max *mit dem Mittelwert* $\langle r\rangle$.

b) *Berechne* $\Delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}$. *Wie hängt die relative Abweichung* $\frac{\Delta r}{\langle r\rangle}$ *von der Hauptquantenzahl* n *ab? Das Ergebnis verdeutlicht, dass für große* n *die Vorstellung einer Kreisbahn zulässig ist.*

Tipp: $\int_0^\infty dx\, x^q e^{-x} = q!$.

Lösung:

a)

$$P(r) = |u_{n,n-1}(r)|^2 = \frac{2}{n(2n)!a_B} \left(\frac{2r}{na_B}\right)^{2n} e^{-\frac{2r}{na_B}}$$

Da $P(r)$ positiv ist und im Urspung und Unendlichen verschwindet, nimmt es dazwischen sein Maximum an. Wir suchen also Extremstellen von $P(r)$:

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0$$

Es gilt

$$\partial_x(x^{2n}e^{-x}) = e^{-x}(2nx^{2n-1} - x^{2n}) = 0 \quad \Rightarrow x_{max} = 2n$$

Es handelt sich um ein Maximum da es die einzige Extremstelle auf $(0,\infty)$ ist und ja mindestens ein Maximum existiert. Damit ist

$$r_{max} = \frac{na_B}{2} x_{max} = n^2 a_B.$$

Für den Erwartunswert gilt nach einer Substitution $x = \frac{2r}{na_B}$:

$$\langle r\rangle = \frac{na_B}{2}\frac{1}{(2n)!}\underbrace{\int_0^\infty dx\, x^{2n+1}e^{-x}}_{(2n+1)!} = n(n+\frac{1}{2})a_B > r_{max}$$

b)
$$\langle r^2\rangle = \left(\frac{na_B}{2}\right)^2 \frac{1}{(2n)!}\underbrace{\int_0^\infty dx\, x^{2n+2}e^{-x}}_{(2n+2)!} = n^2(n+1)(n+\frac{1}{2})a_B^2$$

Damit gilt
$$\Delta r = \frac{a_B n}{2}\sqrt{2n+1}$$
und
$$\frac{\Delta r}{\langle r\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
Für große n macht die Vorstellung als Kreisbahn einigermaßen Sinn.

Aufgabe 6 **(**)** *Behandlung des dreidimensionalen harmonischen Oszillators in Kugelkoordinaten: Der Hamiltonoperator lautet*
$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + \frac{M}{2}\omega^2 r^2.$$

a) *Reduziere die stationäre Schrödingergleichung auf eine Radialgleichung mit dem üblichen Ansatz* $\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$*. Vereinfache sie durch die Substitution mit den dimensionslosen Größen* $y = r\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$ *und* $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$*.*

b) *Zeige, dass das asymptotische Verhalten durch den Ansatz* $u(y) = y^{l+1}e^{-y^2/2}v(y^2)$ *berücksichtigt wird und bestimme die verbleibende Differentialgleichung für* $v(y^2)$

c) *Schreibe die DGL aus b) um, in eine DGL für* $v(\rho)$ *mit der Variablen* $\rho = y^2$*.*

d) *Setze eine Potenzreihe für* $v(\rho)$ *an. Die Abbruchbedingung liefert das Energiespektrum* $E_{nl} = \hbar\omega(2n+l+\frac{3}{2})$ *mit Quantenzahlen* n, l*.*

Lösung:

a) Die Radialgleichung lautet
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} + \frac{M}{2}\omega^2 r^2 - E\right)U(r) = 0$$
Die Substitution ergibt
$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{l(l+1)}{y^2} - y^2 + 2\epsilon\right)u(y) = 0$$

b)

$$y \to 0: \qquad u''(y) = \frac{l(l+1)}{y^2}u(y) \quad \Rightarrow u(y) = y^{l+1}$$
$$y \to \infty: \qquad u''(y) \approx (y^2-1)u(y) \quad \Rightarrow u(y) = e^{-y^2/2}$$

Der Ansatz $u(y) = y^{l+1}e^{-y^2/2}v(y^2)$ berücksichtigt also beides. Einsetzen in die DGL liefert eine Gleichung für v:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{2}{y}(1+l-y^2)\frac{d}{dy} + 2 - 2l - 3\right)v(y^2) = 0$$

c) Durch Anwenden der Kettenregel können wir obige DGL umformen

$$4y^2v''(y^2) + 2v'(y^2) + 4(1+l-y^2)v'(y^2) + 2\left(1 - l - \frac{3}{2}\right)v(y^2) = 0$$

Jetzt substituieren wir $\rho = y^2$, was zu

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(l + \frac{3}{2} - \rho\right)\frac{d}{d\rho} + \nu\right]v(\rho) = 0 \quad , \nu = \frac{1}{2}(\epsilon - l - \frac{3}{2})$$

führt.

d) Mit dem Potenzreihenansatz $v(\rho) = \sum a_k\rho^k$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k-\nu}{(k+1)(k+l+3/2)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} \sim \frac{1}{k} \text{ für große } k$$

Falls die Reihe nie abbricht, verhält sich diese wie die Exponentialreihe. Also

$$v(\rho) \approx e^{\rho} \quad \text{bzw.} \quad v(y^2) = e^{y^2}$$

Das widerspricht der Normierbarkeit von u. Die Reihe muss also bei einem $n = \nu = \frac{1}{2}(\epsilon - l - \frac{3}{2})$ abbrechen. Zurücksubstituieren von $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ und auflösen der Gleichung nach E ergibt

$$E_{nl} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$$

Spin

Aufgabe 7 **(**)** *Wir betrachten den Spin eines Elektrons im magnetischen Feld $\vec{B}$. Der Hamiltonoperator lautet*

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right)\vec{S}\cdot\vec{B}$$

Wir wählen ein konstantes Magnetfeld in z-Richtung. Der Hamiltonoperator ist also gegeben durch

$$H = \omega S_z \quad \textit{mit} \quad \omega = \frac{|e|B}{m_e c}.$$

a) Was sind die Energieeigenwerte und Eigenzustände des Systems?

b) Zum Zeitpunktpunkt $t = 0$ befindet sich das System in dem Zustand

$$|\alpha; t = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

(dem $|S_x; +\rangle$ Eigenzustand der S_x-Komponente). Benutze die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\alpha; t\rangle = H|\alpha; t\rangle$$

um $|\alpha; t\rangle$ zu bestimmen.

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t wieder im Zustand $|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ befindet. Wie groß ist also $|\langle S_x; +|\alpha; t\rangle|^2$?

Lösung:

a) Da der Hamiltonoperator einfach ein Vielfaches von S_z ist, sind die Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$. Die entsprechenden Energieeigenwerte sind $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$.

b) Eigenzustände $|\Psi(t = 0)\rangle$ mit Eigenenergie E_Ψ entwickeln sich gemäß der zeitabhängigen Schrödingergleichung in der Form

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iE_\Psi t}{\hbar}\right)|\Psi(t = 0)\rangle$$

Unser Anfangszustand $|\alpha; t = 0\rangle$ ist ein Überlagerungszustand aus zwei Eigenzuständen des Hamiltonoperators. Die Eigenzustände entwickeln sich separat wie oben (Linearität der Schrödingergleichung). Also ist

$$|\alpha; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle\right]$$

c)

$$\langle S_x;+|\alpha,t\rangle = \frac{1}{2}\Big[\langle +| + \langle -|\Big]\Big[e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle\Big] = \frac{1}{2}\Big[e^{-\frac{i\omega t}{2}} + e^{\frac{i\omega t}{2}}\Big] = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

also ist

$$|\langle S_x;+|\alpha,t\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Aufgabe 8 **(**)(Vgl. Vorlesung)** *Zeige, dass*

$$|\vec{\Omega},+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{+i\varphi/2}|-\rangle$$

einen Eigenzustand zum Projetkionsoperator

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\Omega}$$

darstellt.

Lösung:

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\Omega} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\sigma_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\sigma_y + \cos(\theta)\sigma_z$$

Mithilfe der Identität $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$ ist damit

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}\cdot\vec{\Omega}\,|\vec{\sigma}\cdot\vec{\Omega},+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} + \sin(\theta)\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ e^{i\varphi}(\sin(\theta)\cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} - \cos(\theta)\sin(\theta/2))e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt benutzt man die trigonometrischen Identitäten

$$\cos(\beta) = \cos^2(\beta/2) - \sin^2(\beta/2) \quad \text{und} \quad \sin(\beta) = 2\cos(\beta/2)\sin(\beta/2)$$

und erhält mithilfe der trigonometrischen Identität $\cos^2(\beta/2) + \sin^2(\beta/2) = 1$ die zu erfüllende Eigenwertgleichung

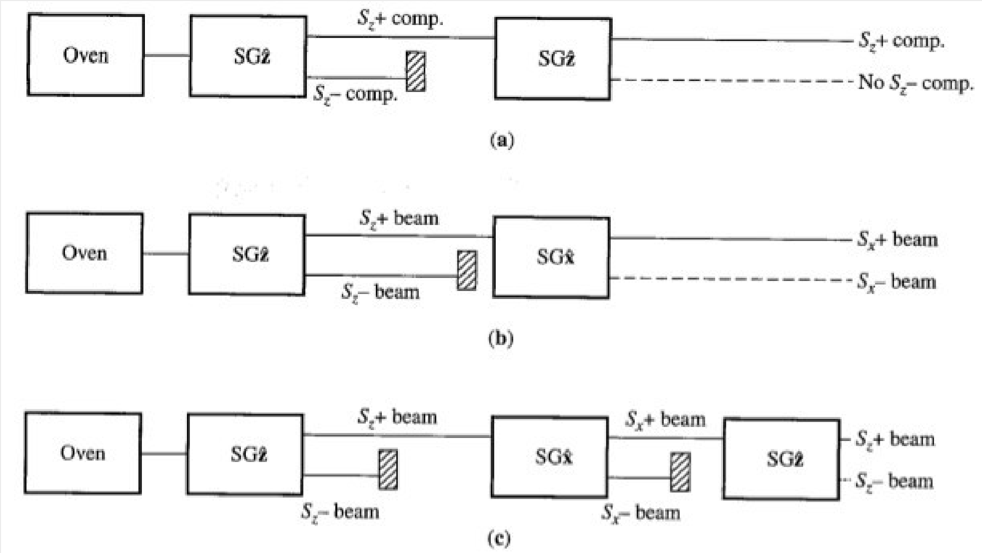
$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\Omega}\,|\vec{\Omega},\pm\rangle = \pm\,|\vec{\Omega},\pm\rangle\,,$$

was auch äquivalent mit dem eigentlichen Spinoperator $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ zu

$$\vec{S}\cdot\vec{\Omega}\,|\vec{\Omega},\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\vec{\Omega},\pm\rangle$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 9 ***(*, für grundlegendes Verständnis)***
Ein Stern-Gerlach Versuch kann auch als Messung vom Spin verstanden werden. Was passiert, wenn wir mehrere Messungen hintereinander schalten? Vor allem, wenn wir verschiedene Komponenten messen? Diskutieren Sie jeweils die nachstehenden Messanordnungen.



Lösung

(a) Der erste SG misst S_z und spaltet unseren Strahl zu 50% in $|S_z,+\rangle$ und 50% in $|S_z,-\rangle$. Jetzt blockieren wir den Strahl mit $|S_z,-\rangle$. Den reinen $|S_z,+\rangle$ Strahl schicken wir nochmal durch einen SG der S_z misst und erhalten wieder einen 100% $|S_z,+\rangle$ Strahl. Das war so zu erwarten.

(b) Der erste SG misst wieder S_z und spaltet unseren Strahl zu 50% in $|S_z,+\rangle$ und 50% in $|S_z,-\rangle$. Wir blockieren den Strahl mit $|S_z,-\rangle$ wieder. Den reinen $|S_z,+\rangle$ schicken wir weiter und messen mit einem SG die S_x-Komponente davon. Diesmal bekommen wir wieder eine Aufspaltung in 50% $|S_x,+\rangle$ und 50% $|S_x,-\rangle$.

(c) Gleiche Prozedur wie in (b), aber jetzt blockieren wir anschließend den $|S_x,-\rangle$-Strahl, leiten den $|S_x,+\rangle$-Strahl weiter und messen mit einem dritten SG davon die S_z-Komponente. Jetzt stellen wir fest das der Strahl sich wieder ausspaltet in 50% $|S_z,+\rangle$ und 50% $|S_z,-\rangle$. Und das obwohl wir nach unserem ersten SG $|S_z,-\rangle$ herausgefiltert hatten!

Die Messung von S_x zerstört sämtliche Informationen des Zustandes von S_z. S_x und S_z können also nicht gleichzeitig gemessen werden. Das kommt daher, dass der Kommutator von S_x und S_z nicht verschwindet und somit kein gemeinsamer Satz an Eigenvektoren existiert.

Aufgabe 10 *(*) Ein Elektron befinde sich in einem Spinzustand*

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix} = A\left((1-2i)\left|+\right\rangle + 2\left|-\right\rangle\right)$$

bezüglich zu den Eigenzuständen von S_z.

1. *Bestimmen Sie die Konstante A, sodass χ korrekt normiert ist.*
2. *Messen Sie S_z bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_z?*
3. *Messen Sie S_x bei diesem Elektron. Welche Werte können Sie prinzipiell erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser möglichen Werte? Was ist der Erwartungswert von S_x?*

Lösung:

1. Normierungsbedingung führt zu
$$1 \stackrel{!}{=} \bar{\chi}\cdot\chi = (1+2i)\begin{pmatrix} 1-2i \\ 0 \end{pmatrix} = |A|^2\cdot(1+4+4) \Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad \text{(bis auf bel. Phase).}$$
2. S_z Messung: Der Spinor befindet sich in der S_z Basis. Die Eigenwerte können daher direkt abgelesen werden zu $P_{+\hbar/2} = |\left\langle +|\chi\right\rangle|^2 = \frac{5}{9}$ und $P_{-\hbar/2} = |\left\langle +|\chi\right\rangle|^2 = \frac{4}{9}$. Damit ergibt sich ein Erwartungswert von $\langle S_z\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\right) = \frac{\hbar}{18} = \langle\chi|S_z|\chi\rangle$
3. S_x Messung: Der Eigenvektor von S_x zum Eigenwert $\pm\frac{\hbar}{2}$ in der S_z Basis ist
$$\left|\pm\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|+\right\rangle \pm \left|-\right\rangle),$$
was man durch Diagonalisierung von S_x oder durch Einsetzen in die Formel aus der Vorlesung mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$ erhält. Damit können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu $P_{+\hbar/2,x} = |\left\langle x,+|\chi\right\rangle|^2 = \frac{13}{18}$ und $P_{-\hbar/2,x} = |\left\langle x,-|\chi\right\rangle|^2 = \frac{5}{18}$. Dies führt zu einem Erwartungswert von $\langle S_x\rangle = \frac{2\hbar}{9}$.

Aufgabe 11 **(**)** *Wir koppeln zwei 1/2 Spins und bezeichnen die Eigenzustände zum Gesamtspinoperator S^2 mit $|s=0,1\ ,m\rangle$. Wir definieren analoge Auf- und Absteiger $S_\pm := S_{1\pm} + S_{2\pm}$.*

1. *Wenden Sie S_- auf den Triplet-Zustand $|s=1, m=0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass $\sqrt{2}\hbar\,|1,-1\rangle$ folgt.*
2. *Wenden Sie $S_\pm$ auf den Singlet-Zustand $|s=0, m=0\rangle$ an und zeigen Sie damit, dass es keine weiteren Singlett-Zustände gibt.*
3. *Zeigen Sie, dass $|1,1\rangle$ und $|,-1\rangle$ Eigenzustände von S^2 mit den erwarteten Eigenwerten sind.*

Lösung:

1. Die Wirkung des Auf- und Absteigers bzgl. einer Komponente ist

$$\begin{aligned} S_\pm \left|\mp\right\rangle &= \hbar\sqrt{(s(s+1) - m(m\pm 1))}\left|\pm\right\rangle = \\ &= \hbar\sqrt{(1/2(1/2+1) \pm 1/2(\mp 1/2 \pm 1))}\left|\pm\right\rangle = \hbar\left|\pm\right\rangle . \end{aligned}$$

   Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} S_- \left|s=1, m=0\right\rangle &= (S_{1-} + S_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|+,-\right\rangle + \left|-,+\right\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{S_{1-}\left|+,-\right\rangle}_{=\hbar\left|-,-\right\rangle} + \underbrace{S_{1-}\left|-,+\right\rangle}_{=0} + \underbrace{S_{2-}\left|+,-\right\rangle}_{=0} + \underbrace{S_{2-}\left|-,+\right\rangle}_{=\hbar\left|-,-\right\rangle}) = \\ &= \sqrt{2}\hbar\left|-,-\right\rangle = \sqrt{2}\hbar\left|1,-1\right\rangle . \end{aligned}$$

2. Mit einer analogen Rechnung wie oben können wir schreiben, dass

$$\begin{aligned} S_\pm \left|0,0\right\rangle &= (S_{1\pm} + S_{2\pm})\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|+,-\right\rangle - \left|-,+\right\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{1\pm}\left|+,-\right\rangle - S_{1\pm}\left|-,+\right\rangle + S_{2\pm}\left|+,-\right\rangle - S_{2\pm}\left|-,+\right\rangle) = 0, \end{aligned}$$

   wobei wir beobachten, dass sich zwei Paare stets gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben.

   Damit können wir durch Anwenden von Auf- und Absteiger keine weiteren Singulet-Zustände erzeugen, so wie es sein sollte.

3. Wir beginnen mit den Hilfsrechnungen bzgl. einer Komponente

$$\begin{aligned} S_x\left|+\right\rangle &= \frac{\hbar}{2}\sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left|-\right\rangle \quad \text{und analog} \\ S_x\left|-\right\rangle &= \frac{\hbar}{2}\left|+\right\rangle \\ S_y\left|+\right\rangle &= \frac{i\hbar}{2}\left|-\right\rangle \quad \text{und analog} \\ S_y\left|-\right\rangle &= \frac{-i\hbar}{2}\left|+\right\rangle . \end{aligned}$$

   Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} S^2\left|1,1\right\rangle &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2\left|+,+\right\rangle = \left(S_1^2 + S_2^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z})\right)\left|+,+\right\rangle = \\ &= 2\cdot\frac{3\hbar^2}{4}\left|+,+\right\rangle + 2\left(\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\left|-,-\right\rangle + \frac{i\hbar}{2}\frac{i\hbar}{2}\left|-,-\right\rangle + \frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2}\left|+,+\right\rangle\right) = \\ &= 2\hbar^2\left|+,+\right\rangle = 1(1+1)\hbar^2\left|1,1\right\rangle \end{aligned}$$

und analog

$$S^2 \left|1,-1\right\rangle = \ldots = 1(1+1)\hbar^2 \left|1,-1\right\rangle .$$