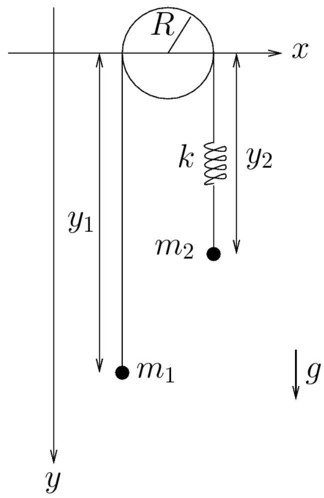


Abbildung 1: Atwoodsche Fallmaschine mit Feder

Probeklausur

1.1 Atwoodsche Fallmaschine

Die Atwoodsche Fallmaschine besteht aus zwei Massen m_1 und m_2 im Schwerefeld der Erde, die über ein Seil der Länge l_0 miteinander verbunden sind, welches reibungsfrei über eine Rolle mit Radius R läuft. Seil und Rolle sind dabei als masselos anzunehmen. In das Seil sei eine zusätzliche Feder mit Federkonstanten k installiert.

(a) Bestimmen Sie die Lagrange Funktion der Atwoodschen Fallmaschine mit zusätzlicher Feder in den Koordinaten y_1 und y_2.

(b) Überlegen Sie sich neue Koordinaten z_1 und z_2 in denen die Lagrangefunktion in Summanden zerfällt, die nur von z_1 oder z_2 abhängen. Diese Koordinaten sind Linearkombinationen von y_1 und y_2 mit bzw. ohne Koeffizienten m_1 und m_2.

(c) Stellen Sie die Euler-Lagrangegleichungen auf und interpretieren Sie diese physikalisch.

Lösung (a) Wir stellen die Lagrangefunktion auf (unsicher bei Vorzeichen...)

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \tfrac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{y}_2^2 + \underbrace{m_1 g y_1 + m_2 g y_2}_{\text{Lageenergie von } m_1, m_2} - \underbrace{\tfrac{1}{2} k (y_1 + y_2 - l_0)^2}_{\text{Auslenkung der Feder}}
\end{aligned}
$$

(b) Der gemischte Term tritt nur bei der Federenergie auf. Wir führen neue Koordinaten ein:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= y_1 + y_2 \\
z_2 &= \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 y_1 - m_2 y_2) \\
\Leftrightarrow y_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} z_1 + z_2 \\
y_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} z_1 - z_2
\end{aligned}
$$

Wir setzen dies in die Lagrangefunktion ein und erhalten damit

$$
\begin{aligned}
L = {} & \tfrac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{z}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{z}_2^2 + m_1 g \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} z_1 + z_2 \right) + m_2 g \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} z_1 - z_2 \right) - \tfrac{1}{2} k (z_1 + \\
= {} & \tfrac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{z}_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{z}_2^2 + 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g z_1 + (m_1 - m_2) g z_2 - \tfrac{1}{2} k (z_1 + \pi R - l_0)^2.
\end{aligned}
$$

(c) Die Euler-Lagrangegleichung lauten

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0
$$

Damit ergibt sich für z_1 die folgende DGL

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{z}_1 \right) - 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g + k (z_1 + \pi R - l_0) &= 0 \\
\Leftrightarrow m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \ddot{z}_1 &= 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g - k (z_1 + \pi R - l_0)
\end{aligned}
$$

und analog für z_2

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{z}_2 \right) - (m_1 - m_2) g &= 0 \\
\Leftrightarrow m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \ddot{z}_2 &= (m_1 - m_2) g
\end{aligned}
$$

Die Gleichgewichtslage der Enden ist nur von der Massendifferenz abhängig. Die Gesamtlänge des Seils wird durch die Feder mitbestimmt.

1.2 Fadenpendel mit Feder

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge d, das in drei Raumrichtungen unter Einfluss der Schwerkraft frei schwingen kann. In das Pendel ist eine Feder mit der Federkonstanten k eingebaut. Die Masse des Pendelkörpers sei m, die Masse des Fadens zu vernachlässigen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten auf.

(b) Ermitteln Sie die Symmetrien des Systems und die entsprechenden Erhaltungsgrößen.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

(d) Stellen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegunsgleichungen auf.

Lösung (a) Analog zum normalen Fadenpendel stellen wir die Lagrangefunktion auf, berücksichtigen nun aber die variable Länge des Pendels und die potentielle Energie der Feder.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \tfrac{1}{2}k(r-d)^2 \end{aligned}$$

(b) Die Lagrangefunktion hängt nicht explizit von t ab $\rightarrow$ Energieerhaltung. Die Lagrangefunktion hängt nicht von ϕ ab ist also invariant unter Rotationen um die z-Achse also ist der Drehimpuls um die z-Achse eine Erhaltungsgröße.
(c) Wir berechnen die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

für die Variablen r, ϕ und θ. Man beachte nun, dass r auch zeitabhängig ist. Für r erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r}) - mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(r-d) = 0 \\ \Leftrightarrow m\ddot{r} = \underbrace{mr(\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2)}_{\text{Zentripetalkraft}} + mg\cos\theta - k(r-d). \end{aligned}$$

Für ϕ bekommen wir wieder die Erhaltungsgeröße

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0.$$

Für θ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right)+mgr\sin\theta+mr^2 sin\Theta cos\Theta\dot{\phi}^2&=0\\ \Leftrightarrow mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{\theta}\dot{r}&=-mgr\sin\theta\\ \Leftrightarrow mr^2\ddot{\theta}&=-2mr\dot{\theta}\dot{r}-mgr\sin\theta\end{aligned}$$

(d) Wir berechnen die kanonischen Impulse

$$\begin{aligned}p_r&=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r}\\ p_\phi&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}\\ p_\theta&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}H&=p_r\dot{r}+p_\phi\dot{\phi}+p_\theta\dot{\theta}-L\\ &=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}+\frac{p_\theta^2}{2mr^2}-mgr\cos\theta+\tfrac{1}{2}k(r-d)^2.\end{aligned}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen lauten

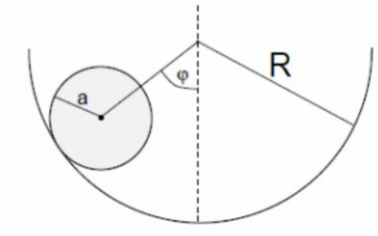
$$\begin{aligned}\dot{p}_r&=-\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\theta}+\frac{p_\theta^2}{mr^3}+mg\cos\theta-k(r-d)\\ \dot{r}&=\frac{\partial H}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}\\ \dot{p}_\phi&=-\frac{\partial H}{\partial\phi}=0\\ \dot{\phi}&=\frac{\partial H}{\partial p_\phi}=\frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}\\ \dot{p}_\theta&=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=\frac{p_\phi^2}{mr^2\sin^3\theta}\cos\theta+mg\sin\theta\\ \dot{\theta}&=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}\end{aligned}$$

1.3 Zylinder im Zylinder

Ein homogener Zylinder mit Radius a und Masse M rollt auf der Innenseite eines Festen Zylinders mit Radius R unter Einfluss der Schwerkraft. Geben Sie die Bewegungsgleichung des Zylinders an. Zeigen sie zuerst, dass die Rollbedingung gegeben ist durch:

$$\omega = \dot{\phi}\frac{R-a}{a} \tag{1}$$

Wobei ω die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der sich der rollende Zylinder dreht.



1.3.1 Lösung

Zuerst stellen wir die Schwerpunktsgeschwindigkeit auf:

$$v_s = \dot{\phi}(R-a) \tag{2}$$

Man kann die Schwerpunktsgeschwindigketi auch über die Winkelgeschwindigkeit ausdrücken:

$$v_s = a\omega \tag{3}$$

Durch gleichsetzen und Auflösen nach ω erhält man die gesuchte Bedingung. Die Kinetische Energie setzt sich nun aus der Schwerpunktsbewehgung und der Rotation zusammen. Für die Drehbewegung benötigen wir zuerst das Trägheitsmoment um die Mittelachse eines Zylinders:

$$\Theta_{zz} = \int \rho(x^2+y^2)dxdydz = \rho l \int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2}Ma^2 \tag{4}$$

Die kinetische Energie ergibt sich dann also zu:

$$T = T_s + T_{rot} = \frac{M}{2}v_s^2 + \frac{\Theta}{2}\omega^2 \tag{5}$$

Die Potentielle Energie:

$$V = -cos(\phi)(R-a)Mg \tag{6}$$

Alles Einsetzen:

$$L = \frac{3M}{4}(R-a)^2\dot{\phi}^2 + cos(\phi)(R-a)Mg \tag{7}$$

Die Bewegungsgleichung erhalten wir durch die Euler-Lagrangegleichung:

$$\frac{3M}{2}(R-a)^2\ddot{\phi} + sin(\phi)(R-a)Mg = 0 \tag{8}$$

1.4 Zwei Federn Zwei Massen

a)Berechnen sie ω allgemein für das Folgende System.(Wird an der Tafel Skizziert) Zwei verchieden Massen sind Durch zwei Federn verbunden und mit einer Festen Wand verbunden. Lösen sie die Resultierende Gleichung für ω möglichst weit auf. Tipp: setzen Sie die 2. Masse als $c \cdot M$ an.
b) Es seien für ein System aus zwei Massen folgende Amplitudenvektoren gegeben:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -42 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Erklären Sie was diese bedeuten. Was können Sie über die Absolute Auslenkung der 1. Masse aussagen?

1.4.1 Lösung

Zuerst stellen wir die Energie auf(Die x sind die Auslenkungen nicht die absoluten Koordinaten):

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{\alpha M}{2}\dot{x}_2^2 \tag{11}$$

$$V = x_1^2 k + (x_1 - x_2)^2 k \tag{12}$$

Hiermit können wir den Lagrange bilden:

$$L = T - V = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{\alpha M}{2}\dot{x}_2^2 - x_1^2 k + (x_1 - x_2)^2 k \tag{13}$$

Nach dem ausmultiplizieren lassen sich die Matrizen T und V ablesen:

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \alpha M \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$V = \begin{pmatrix} 2k & k \\ k & k \end{pmatrix} \tag{15}$$

Über die determinantengleichung erhalten wir eine quadratische Glechung in ω^2 und können somit nach ω^2 auflösen:

$$det(V - \omega^2 T) = \alpha M^2 \omega^4 - \omega^2(2k\alpha M + kM) + k^2 = 0 \tag{16}$$

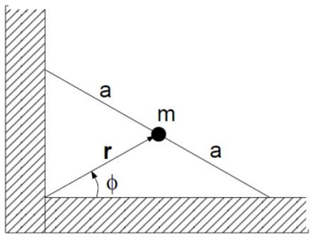
Hieraus folgt direkt:

$$\omega_{1/2}^2 0 \frac{-k[(2\alpha + 1) \pm \sqrt{1 - 2\alpha}}{2\alpha M)} \tag{17}$$

b) Die Amplituden geben die Relativen Auslenkungen an. Dasheißt man kann nichts über die absolute Auslenkung aussagen. Bei $\vec{A_1}$ Schwingen die Massen entgegengesetzt, wobei die Amplitude der Masse 2 42 mal die der 1. Masse beträgt. Bei $\vec{A_2}$ Schwingen sie also parallel, wobei die Amplitude der Masse 2 3 mal die der 1. Masse beträgt

1.5 Stange gleitet Wand hinab

Eine Masse m sei genau in der Mitte einer Masselosen Stange der Länge 2a fest angebracht. Dieses Gebilde lehnt Reibungsfrei an einer Wand und gleitet wegen der Gravitationskraft, die auf m wirkt an ih hinab. Die Stange berührt zu jeder zeit die Wand. Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und berechnen Sie die auftretende/n Zwangskraft/kräfte konkret.



1.5.1 Lösung

Zwangsbedingung:

$$r - a = 0 \tag{18}$$

Hieraus folgt als Ansatz für die Zwangskraft:

$$\vec{F}_z = \lambda\vec{\nabla} = \lambda\vec{e}_r \tag{19}$$

Die Bewegung beschränkt sich auf folgenden Bereich:

$$y = rsin\phi \; x = rcos\phi \tag{20}$$

Hiermit erhalten wirfolgende Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mgsin\phi + \lambda \tag{21}$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = -gcos\phi \tag{22}$$

Durch Ableiten der Zwangsbedingung erhalten wir direkt r(t):

$$r(t) = a \; \dot{r} = 0 \tag{23}$$

Somit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen:

$$-ma\dot{\phi}^2 = -mgsin\phi + \lambda \tag{24}$$

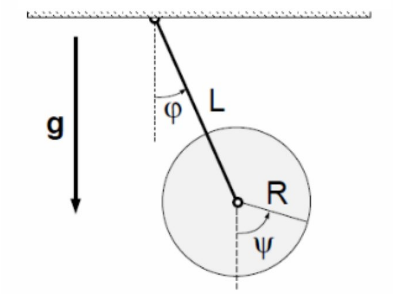
$$a\ddot{\phi} = -gcos\phi \tag{25}$$

Hier kann nun direkt nach λ aufgelöst werden und damit wissen wir auch die Zwangskraft:

$$\vec{F}_z = \vec{e}_r(mgsin\phi - ma\dot{\phi}^2) \tag{26}$$

1.6 Drehende Scheibe an Pendel

Betrachten Sie ein ebenes Pendel, das aus einer masselosen Stange der Länge L und einer Scheibe der Gesamtmasse M und Radius R besteht, die am Ende der Stange in ihrem Mittelpunkt fixiert ist. Die Stangen erlaubt Schwingungen in der Ebene und die Scheibe kann sich um ihre Symmetrieachse drehen. Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen. Berechnen Sie dann mit Hilfe der Klenwinkelnäherung die Frequenz mit der die Scheibe pendelt.



1.6.1 Lösung

$$V = -MLgcos\phi \tag{27}$$

Wir benötigen Zuerst noch das Trägheitsmoment der Scheibe:

$$\Theta = \int d^3r\rho_0[x^2 + y^2] = \frac{M}{2}R^2 \tag{28}$$

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\psi}^2 \tag{29}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\psi}^2 + MLgcos\phi \tag{30}$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\psi} = 0 => \dot{\psi} = const \tag{31}$$

$$ML^2\ddot{\phi} + MLgsin\phi = 0 \tag{32}$$

Hier lässt sich ω direkt ablesen.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{33}$$

1.7 Sehr Kurze Aufgabe

Bestimmen Sie das Verhältnis des Trägheitstensors eines Halbzylinders mit Radius R und Masse M zu dem eines Vollzylinders Mit gleichem Radius und Gleicher Masse.

1.7.1 Lösung

Der Trägheitstensor ist Linear in M. Der Halbzylinder hat das Halbe Trägheitsmoment eines Vollzylinder mit Masse 2M. Daher hat er das Gleiche Trägheitsmoment wie der Vollzylinder mit Masse m.