Übungen zum Ferienkurs Theoretische Mechanik

Starre Körper

Übungen, die mit einem Stern $\star$ markiert sind, werden als besonders wichtig erachtet.

3.1 Trägheitstensor eines homogenen Quaders

Bestimmen Sie den Trägheitstensor bzgl. des Hauptachsensystems eines Quaders mit konstanter Massendichte ρ_0, und den Seitenlängen a, b und c. Berechnen Sie dannach das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die entlang einer Diagonale des Quaders verläuft.

3.1.1 Lösung

Aus Symmetriegründen folgt, dass der Schwerpunkt des Quaders in der "Mitte" , und die Hauptachsen parallel zu den Kanten liegen. Will man diese Tatsache noch beweisen, kann man einfach die Träghetsmomente des Trägheitstensors berechnen, welche nicht auf der Diagonalen des Tensors liegen. Diese werden dann 0 ergeben, womit man gezeigt hatt, dass das gewählte System das Hauptachsensystem ist.Nun werden, mit der aus der Vorlesung bekannten Formel, die Hauptträgheitsmomente berechnet:

$$\Theta_{33} = \int d^3r\rho(r)(r^2 - z^2) \tag{1}$$

Wobei:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0\Theta(\frac{a}{2} - x)\Theta(\frac{a}{2} + x)\Theta(\frac{b}{2} - y)\Theta(\frac{b}{2} + y)\Theta(\frac{c}{2} - z)\Theta(\frac{c}{2} + z) \tag{2}$$

Eingesetzt in das Integral:

$$\Theta_{33} = \int d^3r\rho_0\Theta(\frac{a}{2} - x)\Theta(\frac{a}{2} + x)\Theta(\frac{b}{2} - y)\Theta(\frac{b}{2} + y)\Theta(\frac{c}{2} - z)\Theta(\frac{c}{2} + z)(\vec{r}^2 - z^2) \tag{3}$$

$$=> \Theta_{33} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz\rho_0(x^2 + y^2) = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \tag{4}$$

Analog hierzu berechnen sich die anderen beiden Hauptträgheitsmomente. Die Ergebnisse sind dann:

$$\Theta_{11} = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) \tag{5}$$

$$\Theta_{22} = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \tag{6}$$

$$\Theta_{33} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \tag{7}$$

Da dies die Hauptträgheitsmomente sind, sind die restlichen Einträge des Trägheitstensors 0.

Nun soll das Trägheitsmoment um eine Drehachse auf der Diagonale des Quaders berechnet werden. Hierzu benötigt man zuerst den Vektor der Drehachse:

$$\vec{n} := \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{8}$$

Das Trägheitsmoment dieser Achse ergibt sich dann folgendermaßen:

$$\Theta_n = \vec{n}^T\Theta\vec{n} \tag{9}$$

$$\Theta_n = \frac{M}{6}\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{10}$$

3.2 Kräftefreier axialsymmetrischer Kreisel

Berechnen Sie im körperfestem System die Winkelgeschwindigkeit eines kräftefreiem axialsymmetrischem Kreisels (M=0 und $\Theta_1 = \Theta_2$):

3.2.1 Lösung

Aus der Angabe ergeben sich die euler'schen Kreiselgleichungen zu :

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 = -\omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) \tag{11}$$

$$\Theta_2\dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) \tag{12}$$

$$\Theta_3\dot{\omega}_3 = -\omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) = 0 \tag{13}$$

Aus der letzten gleichung sehen wir, dass $\omega_3 = konst$. Nun differenzieren wir (11):

$$\ddot{\omega}_1 = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\omega_3\dot{\omega}_2 \tag{14}$$

Nun setzt man (12) ein:

$$\ddot{\omega}_1 = -\left(\frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\right)^2 \omega_3^2\omega_1 = -K^2\omega_1 \tag{15}$$

Aus dieser Differentialgleichung folgt nun ω_1:

$$\omega_1(t) = Asin(Kt + \delta) \tag{16}$$

Eingesetzt in (12) erhält man ω_2:

$$\omega_2(t) = Acos(Kt + \delta) \tag{17}$$

3.3 Schwingung eines Zylinders

Ein Zylinder der Masse M,mit homogener Massenverteilung, mit Radius a, rollt ohne zu gleiten in einer zylindrischen Fläche, mit Radius $R > a$, im Schwerefeld .Berechnen Sie die Schwingungsdauer.Es darf angenommen werden, dass ϕ klein ist.

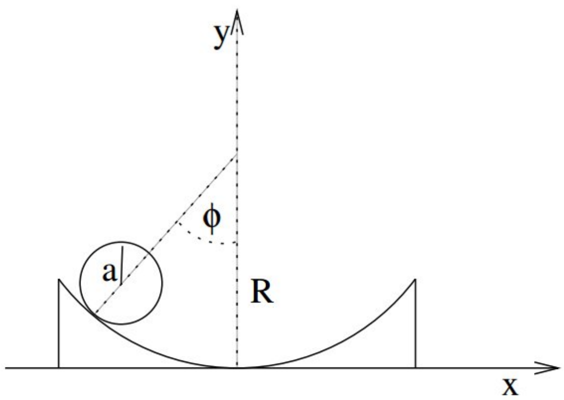


Abbildung 1:

3.3.1 Lösung

Aus der Zeichnung folgt als Rollbedingung:

$$(R-a)\dot{\phi} = a\dot{\theta} \tag{18}$$

Nun stellen wir die Trajektorie des Schwerpunkts in Abhängigkeit von ϕ auf.:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (R-a)sin\phi \\ a+(R-a)(1-cos\phi) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Die Kinetische Energie ergibt sich aus der Translations- und der Rotationsenergie. Damit wird die Lagrangefunktion zu:

$$L = T_{trans} + T_{rot} - V = \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + \frac{1}{2}\Theta\dot{\theta}^2 - mgy_s \tag{20}$$

Wir benötigen nun also noch den Trägheitstensor des Zylinders. Aus der Angabe erhalten wir für die Dichte(l sei die Länge des Zylinders)

$$\rho(\vec{r}) = \Theta(a-|\vec{r}|)\Theta(z)\Theta(l-z)\frac{M}{\pi a^2 l} \tag{21}$$

Einsetzen in die Formel für das Trägheitsmoment gibt:

$$\int_0^l dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\phi r(x^2+y^2) = \frac{Ma^2}{2} \tag{22}$$

Eingesetzt in die Lagrange-Funktion erhalten wir(nach vernachlässigen von Konstanten):

$$L = \frac{3M}{4}(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)cos\phi \tag{23}$$

Hieraus erhalten wir als Bewegungsgleichung:

$$\frac{3M}{2}(R-a)^2\dot{\phi} = -mg(R-a)sin\phi \tag{24}$$

Nach Kleinwinkelnäherung:

$$\frac{3M}{2}(R-a)^2\dot{\phi} = -mg(R-a)\phi \tag{25}$$

Dies ist eine Oszillatorgleichung und hat folgende Lösung:

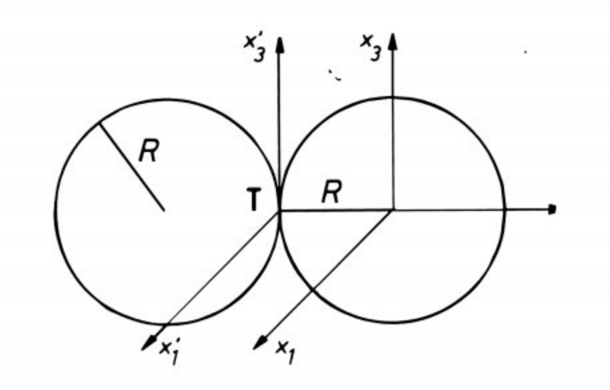
$$\phi(t) = \phi_0 cos(\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}t) \tag{26}$$

Die Schwingungsdauer ist dann:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-a)}{2g}} \tag{27}$$

3.4 Zwei Kugeln

Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes, von 2 Kugeln mit gleichem Radius und homogener Masseverteilung. Die Kugeln sind im Schwerpunkt T verbunden.



3.4.1 Lösung

Zuerst berechnet man den Trägheitstensor einer Kugel:

$$\Theta_{zz} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi \int_0 2\pi\rho_0(x^2+y^2)r^2 sin\theta d\theta \tag{28}$$
$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\phi \int_0 2\pi \frac{3M}{4\pi R^3}(r^2 sin^2\theta(sin^2\phi + cos^2\phi)r^2 sin\theta d\theta \tag{29}$$
$$= \frac{2}{5}MR^2 \tag{30}$$

Aus Symmetriegründen folgt, dass $\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz}$. Die Elemente des Tensors welche gemischte Koordinaten enthalten verschwinden alle, da alle eine Integration entweder über sin oder cos mit den Grenzen0 bis 2π enthalten. Mit Hilfe des Satzes Von Steiner Transformieren wir den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunktes einer Kugel so, dass er bezüglich des Punktes T gilt.(Verschiebung um R entlang der y Achse)

$$\Theta_{11}^T = \Theta_{33}^T = \frac{2}{5}MR^2 + M(R^2\delta_i k - R_1R_1) = \frac{7}{5}MR^2 \tag{31}$$

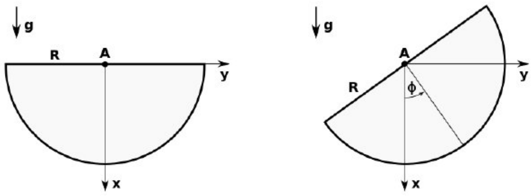
$$\Theta_{22}^T = \Theta_{22}^S P \tag{32}$$

Da die Komponenten des Verschiebungsvektors nur quadratisch vorkommen, ist der Trägheitstensor bzgl. T für beide Kugeln gleich. Den Gesamtträgheitstensor erhalten wir, indem wir die Tensoren der einzelnen Kugeln addieren:

$$\begin{pmatrix} \frac{14}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5}MR^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

3.5 Halbzylinder

Ein Halbzylinder mit homogener Massendichte dreht sich im Schwerefeld um eine Achse, welche mit der Symmetrieachse des Zylinders zusammenfällt. Der Halbzylinder erstreckt sich H/2 in die und H/2 aus der Ebene.Bestimmen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems.(Der Halbzylinder Kann nicht überkippen. d.h $\phi \leq \pi$



(a) Halbzylinder im Gleichgewicht (b) Halbzylinder um die Achse A gedreht

3.5.1 Lösung

Aus Symmetriegründen sieht man sofort, dass $z_S = 0$ und dass $y_z = 0$. Die x Koordinate muss nun wirklich berechnet werden:

$$x_s = \frac{1}{M}\int x\rho dxdydz = \frac{1}{M}\int x\frac{2M}{\pi R^2 H}dxdydz = \frac{4}{3\pi}R \tag{34}$$

Das einzige relevante Trägheitsmoment ist Θ_{zz}

$$\Theta_{zz} = \int \rho(x^2 + y^2) = \frac{MR^2}{2} \tag{35}$$

Nun folgen hieraus die Energien und der Lagrange:

$$T = \frac{\Theta_A}{2}\dot{\phi}^2 \tag{36}$$

$$V = -Mgx_s cos\phi \tag{37}$$

$$L = \frac{\Theta}{2}\dot{\phi}^2 + Mgx_s cos\phi \tag{38}$$

Aus den Euler-Lagrangegleichungen folgt die Bewegungsgleichung:

$$\Theta\ddot{\phi} + Mg\frac{4R}{3\pi}sin\phi = 0 \tag{39}$$