Übungen zum Ferienkurs Theoretische Mechanik

Hamilton und Kleine Schwingungen

Übungen, die mit einem Stern $\star$ markiert sind, werden als besonders wichtig erachtet.

3.1 Zentralpotential

Betrachten Sie ein Teilchen in einem Zentralpotential mit Lagrangefunktion

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r).$$

Finden Sie die zu r und ϕ gehörigen kanonischen Impulse p_r und p_ϕ und stellen Sie die Hamiltonfunktion auf. Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf und zeigen Sie, dass eine Lösung durch $r(t) = R$, $\phi(t) = \omega t$ mit geeignetem R, ω gegeben ist. Wie lautet die Beziehung zwischen R, ω und $V'(R)$?

Lösung Wir bestimmen die kanonischen Impulse

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \\ &= m\dot{r} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \\ &= mr^2\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Damit stellen wir die Hamiltonfunktion auf

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\phi^2}{mr^2} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r) \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r). \end{aligned}$$

Mit der Hamiltonfunktion stellen wir die Hamiltonschen Gleichungen auf

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_\phi &= 0, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass eine Lösung durch $r(t) = R$, $\phi(t) = \omega t$ mit geeignetem R, ω gegeben ist durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{p_\phi^2}{mR^3} - \frac{\partial V(R)}{\partial r}, \quad 0 = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_\phi &= 0, \quad \omega = \frac{p_\phi}{mR^2} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} p_\phi &= mR^2\omega \\ p_r = 0 &= \frac{m^2R^4\omega^2}{mR^3} - \frac{\partial V(R)}{\partial r} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial V(R)}{\partial r} &= mR\omega^2. \end{aligned}$$

3.2 Kraftstoss auf Oszillator

Ein gedämpfter Oszillator ruht in seiner Gleichgewichtslage. Dann bekommt er einen Kraftstoss. Die Bewegungsgleichung dieses Oszillators ist folgende:

$$f(t) = \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x \tag{1}$$

wobei $\lambda < \omega_0$.Der Kraftstoss hat folgende Form:

$$f(t) = \begin{cases} v_0/T, & \text{falls } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Auslenkung x(t).

3.2.1 Lösung

Für $0 \leq t \leq T$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{v_0}{T} \tag{3}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$x(t) = (acos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t) + bsin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}_0 t))e^{-\lambda t} + \frac{v_0}{T\omega_0^2} \tag{4}$$

Aus der Aufgabe gehen diese Anfangsbedingungen hervor:

$$x(0) = 0 \tag{5}$$

und

$$\dot{x}(0) = 0 \tag{6}$$

Hieraus folgt:

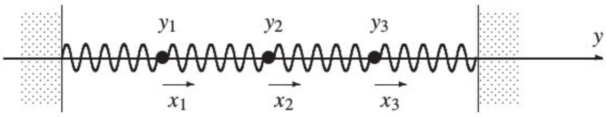
$$a = \frac{v_0}{\omega_0^2 T} \tag{7}$$

$$b = \frac{v_0\lambda}{\omega_0^2 T\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \tag{8}$$

Für den Fall t¿T verschwindet die Kraft, und die homogene Lösung löst die neue Differentialgleichung.Die Anfangsbedingungen für diesen Fall folgen aus der Stetigkeit von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$. Damit ist auch dieser Teil der Lösung eindeutig.

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0^2 T}([cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}(t-T)) + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}sin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}(t-T)]e^{-\lambda(t-T}] \tag{9}$$

$$- [cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}sin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t)]e^{-\lambda t}) \tag{10}$$



3.3 Lineare Kette mit festen Randbedingungen

Drei gleichgroße Massen sind über vier gleiche Federn der Federkonstante k miteinander und mit 2 Wänden verbunden. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist folgendermasen:

$$x_n(t) = y_n(t) - y_n^0 \tag{11}$$

Geben Sie die Lagrangefunktion an. Geben Sie des weiteren die beiden Matrizen T und V an. Bestimmen Sie außerdem die Eigenfrequenzen sowie Eigenvektoren.

3.3.1 Lösung

Dieses System hat 3 Freiheitsgrade. Laut Vorlesung ist die Lagrangegleichung:

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}(\dot{x}_i^2) - \frac{k}{2}[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2] \tag{12}$$

Hier Lassen sich die Matrizen V und T ablesen:

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$V = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \tag{14}$$

Nun folgt die Berechnung der Eigenfrequenzen.

$$det(V - \omega^2 T) = \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

Hieraus ergibt sich folgende Gleichung für ω^2

$$(2k - m\omega^2)^3 - 2k^2(2k - m\omega^2) \tag{16}$$

Die Lösungen sind dann:

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}} \tag{17}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2\frac{k}{m}} \tag{18}$$

$$\omega_3 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}} \tag{19}$$

Die Eigenvektoren folgen aus der Relation aus der Vorlesung:

$$(V - \omega^2 T)A = 0 \tag{20}$$

Die Eigenvektoren sind dann:

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{23}$$

3.4 Und noch einmal Doppelpendel

Auch das Doppelpendel lässt sich mit der methode Kleiner Schwingungen Lösen. Aus der gestrigen Vorlesung ist die Lagrangefunktion bereits bekannt:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_1 g y_1 + \tfrac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + m_2 g y_2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\phi_1}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right) + m_1 g l_1 \cos\phi_1 + m_2 g \left(l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\phi_2 \right) \\ &= \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\phi_1}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \right) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\phi_1 + m_2 g l_2 \cos\phi_2 \end{aligned}$$

Bestimmen sie die Normalmoden und die Amplituden für $l_1 = l_2$ und $m_1 = m_2$. Nähern sie die Auftretenden Funktionen Quadratisch, und den $cos(\phi_1 - \phi_2)$ linear.

3.4.1 Lösung

Durch die geforderten Näherungen vereinfacht sich die Lagrangegleichung zu:

$$L = ml^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}_2^2 + ml^2 \cdot \dot{\phi}_1 \cdot \dot{\phi}_2 - mgl\phi_1^2 - \frac{mgl}{2} \phi_2^2 \tag{24}$$

Nun ermitteln wir wieder T und V:

$$T = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$V = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$det(V - \omega^2 T) = 2m^2 g^2 l^2 - 2m^2 g l^3 \omega^2 + m^2 l^4 \omega^4 = 0 \tag{27}$$

$$det(V - \omega^2 T) = 2g^2 - 4gl\omega^2 + l^4 \omega^4 = 0 \tag{28}$$

Aufgelöst nach ω:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}(2 \pm \sqrt{2}) \tag{29}$$

Nun setzen wir die Frequenz in die Eigenwertgleichung zur Berechnung der Schwingungsamplituden.

$$\begin{pmatrix} -2 - 2\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{30}$$

Wir erhalten die Beiden Vektoren:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Analog erhalten wir den zweiten Vektor.

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{32}$$

3.5 Normalkoordinaten

In der Vorlesung wurde ein System aus 3 Massepunkten und 2 Federn betrachtet. Transformieren sie die Auslenkungen (x_1,x_2 und x_3) in die Normalkoordinaten. Die Eigenvektoren waren:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Hieraus folgt, dass a folgende Form hat:

$$a = a_{ik} = (\vec{A}_{1_i}, \vec{A}_{2_i}, \vec{A}_{3_i}) \tag{36}$$

wobei $\vec{A}_{1_i}$ die i-te komponente von $\vec{A}_1$ ist.

3.5.1 Lösung

Die Normierung über

$$\vec{A}_i^T T \vec{A}_i = 1 \tag{37}$$

gibt uns die neuen normierten Einheitsvektoren:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Wendet man nun die Rücktransformation aus der Vorlesung auf folgenden Vektor an:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Es Ergeben sich dann folgende Vektoren:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} m(x_1 + x_2 + x_3) \tag{42}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} m(x_1 - x_3) \tag{43}$$

$$Q_3 = \frac{1}{\sqrt{6m}} m(x_1 - 2x_2 + x_3) \tag{44}$$