Übungen zum Ferienkurs Theoretische Mechanik

Lagrange und Hamilton Mechanik

Übungen, die mit einem Stern $\star$ markiert sind, werden als besonders wichtig erachtet.

2.1 3D Fadenpendel$\star$

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge d, das in drei Raumrichtungen unter Einfluss der Schwerkraft frei schwingen kann. Die Masse des Pendelkörpers sei m, die Masse des Fadens zu vernachlässigen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten auf.

(b) Ermitteln Sie die Symmetrien des Systems und die entsprechenden Erhaltungsgrößen.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Lösung (a) Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in den Aufhängepunkt des Pendels. Die Länge des Pendels ist fest, also gibt es keine Änderung der radialen Komponente $\dot{r} = 0, r = d$.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2} m (d^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 + d^2 \dot{\theta}^2) + mgd\cos\theta \end{aligned}$$

(b) Die Lagrangefunktion ist invariant unter Zeittranslationen d.h. die Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße. Die Lagrangefunktion hängt nicht von ϕ ab ist also invariant unter Rotationen um die z-Achse also ist der Drehimpuls um die z-Achse eine Erhaltungsgröße.
(c) Wir bestimmen die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

mit den Variablen θ und ϕ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(md^2 \sin^2\theta \dot{\phi}\right) = 0$$

Damit ist diese Größe eine Erhaltungsgröße wie bereits in (b) gesagt.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(md^2\dot{\theta}\right) + mgd\sin\theta - md^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 &= 0 \\ md^2\ddot{\theta} &= -mgd\sin\theta + md^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= -\tfrac{g}{d}\sin\theta + \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

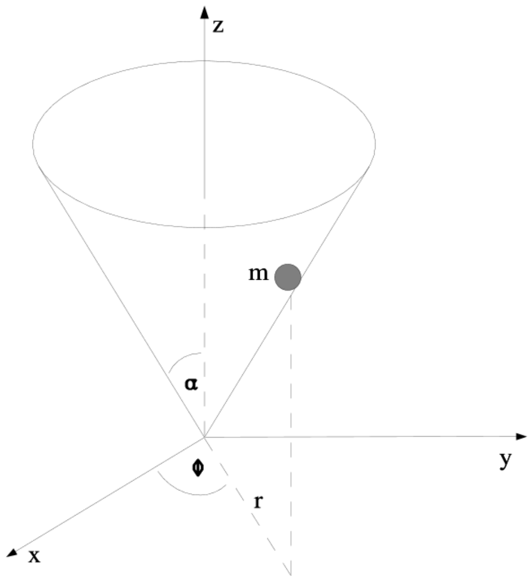
Für θ erhalten wir eine typische Schwingungsgleichung, die wir für kleine Auslenkung lösen könnten.

2.2 Teilchen im Kreiskegel$\star$

Eine Punktmasse m rollt reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels unter dem Einfluss der Schwerkraft.

(a) Geben Sie explizit die Zwangsbedingungen an.

(b) Geben Sie die Lagrangefunktion an und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.



Lösung (a) Das Teilchen kann sich nur auf der Oberfläche des Kreiskegels bewegen. Das wird durch folgende Zwangsbedingung beschrieben

$$\tan\alpha = \frac{r}{z}$$

(b) Wir stellen die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten unter Verwendung der Zwangsbedingung auf:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha}\right) - mg\frac{r}{\tan\alpha} \end{aligned}$$

Damit lauten die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

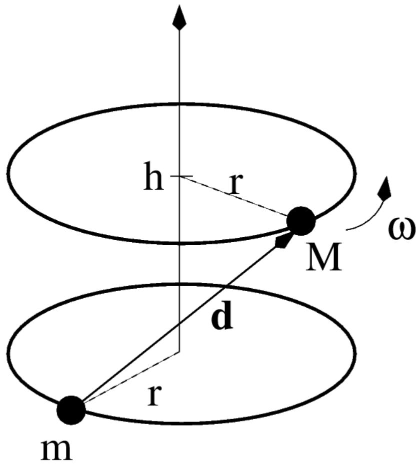
für r und ϕ

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{r}\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right)\right) + \frac{mg}{\tan\alpha} - mr\dot{\phi}^2 = 0 \\ \Leftrightarrow m\ddot{r}\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right) = -\frac{mg}{\tan\alpha} + mr\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = 0$$

2.3 Punktmasse auf rotierendem Ring

Eine Punktmasse m kann sich reibungsfrei auf einem horizontalen Ring mit Radius r bewegen. Auf einem identischen horizontalen Ring, der sich oberhalb des ersten Ringes mit der Höhendifferenz h befindet, bewege sich eine weitere Punktmasse M mit einer (durch einen äußeren Zwang vorgegebenen) konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Zwischen den beiden Massen wirke eine durhc ein Potential $V(d)$ definierte Kraft (d sei der Betrag des Abstandsvektors $\mathbf{d}$ der beiden rotierenden Massen). Geben Sie die (explit zeitabhängige!) Lagrangefunktion für die Punktmasse m an.



Lösung Wir wählen geeignetete Koordinaten. Die Position der Punktmasse m auf dem Ring ist durch den Winkel ϕ festgelegt. Wir definieren das Koordinatensystem so, dass die Position der Punktmasse M durch den Winkel ωt gegeben ist. In Zylinderkoordinaten gilt also

$$\mathbf{x}_m(t) = \begin{pmatrix} r\cos\phi(t) \\ r\sin\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_M(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ h \end{pmatrix}$$

Damit folgt für den Abstand d

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_M \\ \Leftrightarrow d &= \sqrt{r^2(\cos\phi - \cos\omega t)^2 + r^2(\sin\phi - \sin\omega t)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{r^2\left(\cos^2\phi + \cos^2\omega t - 2\cos\phi\cos\omega t + \sin^2\phi + \sin^2\omega t - 2\sin\phi\sin\omega t\right) + h^2} \\ &= \sqrt{r^2\left(2 - 2(\cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t)\right) + h^2} \\ &= \sqrt{r^2\left(2 - 2\cos(\phi + \omega t)\right) + h^2} \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion lässt sich also schreiben

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - V(d) \end{aligned}$$

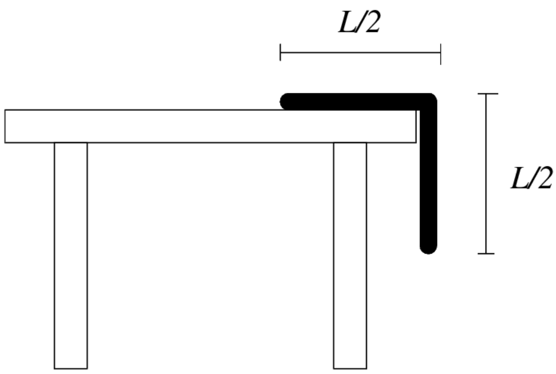
Dabei hängt V über d explizit von t ab.

2.4 Rutschendes Seil⋆

Ein homogenes Seil der Länge L liegt zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über der Tischkante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und beginnt reibungsfrei hinunterzurutschen. Die lineare Massendichte sei μ.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und integrieren Sie diese.



Lösung (a) Als Koordinate wählen wir die Position des unteren Seilendes gemessen von der Tischkante aus y. Wir stellen die Lagrangefunktion auf. Um das Gravitationspotential zu berechnen behandeln wir das überhängende Seil der Länge y wie eine Puntkmasse μy an der Stelle $\frac{y}{2}$ (Schwerkraft greift am Schwerpunkt des überhängenden Seilstücks an). Dann lautet die Lagrangefunktion

$$L = \tfrac{1}{2}\mu L\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}\mu g y^2$$

(b) Die Euler-Lagrangegleichung lautet

$$\ddot{y} = \tfrac{g}{L}y$$

Dies ist eine harmonische Gleichung. Die lösung hat folgende Form

$$y(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$$

mit $\alpha = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Wir benutzen die Anfangsbedingungen $y(0) = \frac{L}{2}, \dot{y}(0) = 0$ und bestimmen die Konstanten.

$$\begin{aligned} y(0) = A + B = \tfrac{L}{2} \\ \dot{y}(0) = A\alpha - B\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow A = B \\ \Leftrightarrow A = \tfrac{L}{4} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung

$$y(t) = \tfrac{L}{2}\cosh\left(\sqrt{\tfrac{g}{L}}t\right)$$

2.5 Perle auf Draht

Eine Perle gleite reibungsfrei und ohne äußere Kräfte auf einem Stab, der sich in der xy-Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung dreht. Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen erster Art auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Führen Sie die Rechnungen in Zylinderkoordinaten durch. Wie lautet die Zwangskraft? Welche Bedeutung hat sie? Ist die Energie erhalten?

Lösung Die Perle kann sich nur entlang des Stabes bewegen; sie besitzt also nur einen Freiheitsgrad. Die beiden Zwangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} g_1 &= z = 0 \\ g_2 &= \phi - \omega t = 0 \end{aligned}$$

Hierbei ist ϕ der Polarwinkel in der xy-Ebene. Wir stellen die Lagrangegleichungen 1.Art auf in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) &= 0 \\ m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) &= \frac{\lambda_2}{\rho}\frac{\partial g_2}{\partial \phi} \\ m\ddot{z} &= \lambda_1 \end{aligned}$$

Zweimaliges Ableiten der Zwangsbedingung g_1 und Einsetzen liefert trivialerweise $\lambda_1 = 0$. Zweimaliges Ableiten der Zwangsbedingung g_2 ergibt $\ddot{\phi} = 0$ und damit ergibt sich durch Einsetzen

$$\lambda_2 = 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}$$

Dies setzen wir ein und erhalten die Bewegungsgleichungen indem wir $\dot{\phi} = \omega$ einsetzen

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = 0, m\rho\ddot{\phi} = 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\rho} = \rho\omega^2, \ddot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

Die Zwangskraft lautet also

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} = \lambda_2 \nabla g_2 &= 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial g_2}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \\ &= 2m\dot{\rho}\omega\mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

Die Zwangskraft hält die Perle auf dem Draht, es handelt sich nicht um die Zentrifugalkraft. Wir lösen die Bewegungsgleichung für ρ durch den Ansatz

$$\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Da die Zwangsbedingung explizit zeitabhängig ist, ist die Energie nicht erhalten.