Übungen zum Ferienkurs Theoretische Mechanik

comment

Mathematische Methoden und Newtonsche Mechanik

Übungen, die mit einem Stern $\star$ markiert sind, werden als besonders wichtig erachtet.

1.1 Differenzieren

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die Resultate soweit wie möglich.

(a) $f(x) = x^2 \ln x$

(b) $f(x) = 3xe^{x^2}$

(c) $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$

Lösung (a) Wir verwenden die Produktregel:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x) &= \partial_x(x^2)\ln x + x^2 \partial_x \ln x \\ &= 2x\ln x + x^2 \tfrac{1}{x} \\ &= 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1)\end{aligned}$$

(b) Wir verwenden Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x) &= \partial_x(3x)e^{x^2} + 3x\partial_x(e^{x^2}) \\ &= 3e^{x^2} + 3xe^{x^2}(2x) \\ &= e^{x^2}(3 + 6x^2) \\ &= 3e^{x^2}(1 + 2x^2)\end{aligned}$$

(c) Wir schreiben die Funktion mit der Exponentialfunktion um:

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(e^{\ln(\sin x)}\right)^{\tan x} \\ &= e^{\ln(\sin x)\tan x}\end{aligned}$$

Dies lässt sich dann mit der Kettenregel und der Produktregel differenzieren:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x) &= \underbrace{e^{\ln(\sin x)\tan x}}_{\text{Ableitung der E-Funktion}} \underbrace{\left(\tfrac{\cos x}{\sin x}\tan x + \ln(\sin x)\left(1+\tan^2 x\right)\right)}_{\text{Innere Ableitung}} \\ &= (\sin x)^{\tan x}\left(1 + \ln(\sin x)\left(1 + \tan^2 x\right)\right)\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Ableitung von $\tan x$ berechnet:

$$\begin{aligned}\partial_x \tan x = \partial_x \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\partial_x \sin x}{\cos x} + \sin x \partial_x \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x}{\cos x} + \sin x \frac{-1}{\cos^2 x}(-\sin x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

1.2 Integrieren

Berechnen Sie eine Stammfunktion zu

(a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(b) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Lösung (a) Wir benutzen die partielle Integration zwei Mal

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x$$

(b) Wir benutzen die Substitutionsregel und setzen

$$\begin{aligned} y &= \cos x \\ \mathrm{d}y &= -\sin x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Damit integrieren wir

$$\begin{aligned} \int f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{-1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Die Stammfunktion lautet also

$$F(x) = \frac{1}{\cos(x)} + C$$

1.3 Gradient, Divergenz und Laplace-Operator $\star$

Sei $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$ und $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$

(b) $\nabla f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}$

(c) $\nabla^2 \ln r = \frac{1}{r^2}$.

Tipp: Kettenregel, Produktregel.

Lösung (a) Mit der Definition der Vektornorm erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla r &= \nabla\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \partial_y\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \partial_z\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist symmetrisch in x, y, z deswegen rechnen wir es hier nur für x vor. Wir benutzen die Kettenregel um erst die Wurzel nach x abzuleiten und dann den inneren Ausdruck.

$$\begin{aligned} \partial_x\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \partial_x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{Ableitung der Wurzel}} \quad \underbrace{2x}_{\text{Innere Ableitung}} \\ &= \frac{1}{r}x \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\nabla r = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}$$

(b) Hier haben wir eine Funktion, die von r abhängt.

$$\nabla f(r) = \begin{pmatrix} \partial_x f(r) \\ \partial_y f(r) \\ \partial_z f(r) \end{pmatrix}$$

Für jede der Ableitungen können wir die Kettenregel verwenden, z.B.:

$$\partial_x f(r) = \partial_r f(r) \partial_x r$$

Wenn man die drei Komponenten zusammenfügt und dann $\partial_r f(r)$ ausklammert ergibt sich das gesuchte Ergebnis unter Benutzung von (a)

$$\begin{aligned}\nabla f(r) &= \partial_r f(r) \nabla r \\ &= \partial_r f(r) \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Diese Ableitung tritt immer bei Zentralpotentialen auf.
(c) Wir wenden den Nabla-Operator zweimal und benutzen (b) und die Produktregel:

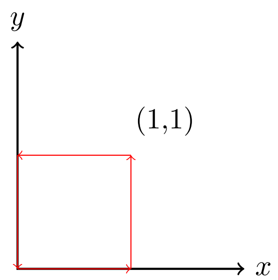
$$\begin{aligned}\nabla^2 \ln r &= \nabla \left(\partial_r \ln r \nabla r\right) \\ &= \nabla\left(\frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r^2}\mathbf{r}\right) \\ &= \left(\nabla \frac{1}{r^2}\right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^2}\left(\nabla \cdot \mathbf{r}\right) \\ &= \partial_r \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^2}\nabla \mathbf{r} \\ &= -2\frac{1}{r^3} r + 3\frac{1}{r^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\end{aligned}$$

1.4 Kurvenintegral

Sei die Vektorfunktion $\mathbf{F}$ definiert durch

$$\mathbf{F} = (x+2)y^2\mathbf{e}_x + 4xy\mathbf{e}_y$$

und sei die in der Ebene (x, y) liegende Kurve C gegeben wie in der Skizze.



Berechnen Sie das Linienintegral

(a) direkt

(b) nach dem Stokeschen Satz.

Lösung (a)

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{s} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{0}) \cdot \mathbf{e}_x \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{1},\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_y \mathrm{d}y + \int_1^0 \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{1}) \cdot \mathbf{e}_x \mathrm{d}x + \int_1^0 \mathbf{F}(\mathbf{0},\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_y \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^1 4y\mathrm{d}y + \int_1^0 (x+2)\mathrm{d}x + \int_1^0 0\mathrm{d}y \\ &= \left[2y^2\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^0 = 2 - \tfrac{1}{2} - 2 \\ &= -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen zuerst die Rotation von $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\partial_x(4xy) - \partial_y\left((x+2)y^2\right)\right)\mathbf{e}_z \\ &= (4y - 4y - 2xy)\mathbf{e}_z \\ &= -2xy,\end{aligned}$$

da die anderen Komponenten wegfallen. Damit ergibt sich direkt nach dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{s} &= \int \nabla \times \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 (-2xy)\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \left[xy^2\right]_0^1 \mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{d}x = -\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= -\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.5 Konservative Kraftfelder

(a) Ist das folgende auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definierte Kraftfeld konservativ? Geben Sie ggf. ein Potential an. (c, μ sind Konstanten.)

$$\mathbf{F} = \frac{ce^{-\mu r}}{r^2}(1 + \mu r)\hat{\mathbf{r}}$$

(b) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ konstante Vektoren. Welche Bedingung müssen sie erfüllen, damit das auf $\mathcal{R}^3$ definierte Kraftfeld $\mathbf{F} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$ konservativ ist.

Lösung (a) Wir bestimmen das Potential V und zeigen damit, dass $\mathbf{F}$ konservativ ist. V hängt nur von r ab

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\nabla V(r) \\ &= -\partial_r V(r)\nabla r = -\partial_r V(r)\hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

Damit muss gelten

$$-\partial_r V(r) = \frac{ce^{-\mu r}}{r^2}(1 + \mu r)$$

und Integration über r liefert dann das Potential

$$V(r) = \frac{ce^{-\mu r}}{r}$$

(b) Wir prüfen unter welcher Bedingung $\mathbf{F}$ die notwendige Bedingung $\mathbf{rotF} = 0$ erfüllt.

$$\begin{aligned}\mathbf{rotF} &= \nabla \times (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})) \\ &= \nabla \times \begin{pmatrix}(b_1x + b_2y + b_3z)a_1 \\ (b_1x + b_2y + b_3z)a_2 \\ (b_1x + b_2y + b_3z)a_3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}b_2a_3 - b_3a_2 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ b_1a_2 - b_2a_1\end{pmatrix} \\ &= \mathbf{b} \times \mathbf{a}\end{aligned}$$

Damit $= 0$ gilt müssen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ parallel zueinander sein.

1.6 Mechanik des Massepunktes $\star$

Ein Ball der Masse m wird senkrecht nach oben geworfen. Auf ihn wirken die Erdbeschleunigung g und eine Newtonsche Reibungskraft proportional zum Geschwindigkeitsquadrat $|\mathbf{F}_{\text{Reibung}}| = cv^2$ mit $c = \text{const}$. Berechnen Sie die Zeit t_1, die der Ball bis zum höchsten Punkt braucht. Hinweis:

$$\frac{\mathrm{d}\arctan(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Lösung Wir stellen die Newtonsche Bewegungsgleichung auf.

$$m\ddot{\mathbf{x}} = F$$

Das Problem ist eindimensional entlang der z-Richtung. Die Gravitationskraft wirkt immer in negative z-Richtung, die Reibungskraft wirkt beim Aufsteigen in negative z-Richtung, beim Fallen in positive z-Richtung (jeweils entgegen der Bewegung des Balls). Wir erhalten folgende DGL

$$m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}^2$$

mit Anfangsbedingung $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_0$. Wir gehen über von einer DGL zweiter Ordung zu einem System DGLs erster Ordung mit Variable $v = \dot{z}$. Wir benutzen Trennung der Variablen um $v(t)$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -g - \tfrac{c}{m}v^2 \\
\frac{\mathrm{d}v}{1+\frac{c}{mg}v^2} &= -g\mathrm{d}t \\
\sqrt{\tfrac{mg}{c}}\left[\arctan\left(\sqrt{\tfrac{c}{mg}}v\right) - \arctan\left(\sqrt{\tfrac{c}{mg}}v_0\right)\right] &= -gt \\
v &= \sqrt{\tfrac{mg}{c}}\tan\left(-\sqrt{\tfrac{cg}{m}}t + \widetilde{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{\alpha} = \arctan\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}v_0\right)$. Wir bestimmen t_1:

$$\begin{aligned}
v(t_1) &= 0 \\
&= \sqrt{\tfrac{mg}{c}}\tan\left(-\sqrt{\tfrac{cg}{m}}t_1 + \widetilde{\alpha}\right) \\
\Leftrightarrow t_1 &= \sqrt{\tfrac{m}{cg}}\widetilde{\alpha} \\
&= \sqrt{\tfrac{m}{cg}}\arctan(\sqrt{\tfrac{c}{mg}}v_0)
\end{aligned}$$

1.7 Mechanik des Massepunkts II

Im Schwimmbad rutscht der kleine Konrad reibungsfrei eine spiralförmige Rutsche hinunter. Die Rutsche hat einen Radius R und drei Windungen mit einem Höhenunterschied h. Berechnen Sie die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ in einem geeignet gewählten Koordinatensystem. Hinweis: Betrachten Sie die Spirale abgerollt auf eine äquivalente schiefe Ebene und verwenden Sie den Energieerhaltungssatz.

Lösung Mit Energierhaltung gilt:

$$E(t=0) = E(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Die Gesamtlänge der Rutsche beträgt drei Windungen also $6\pi R$. Als Hauptkoordinate wählen wir Konrads momentane Position entlang der äquivalenten schiefen Ebene s. Daraus folgt die Relation zwischen s und z: $z(s) = h - \frac{h}{6\pi R}s$. Ebenso gilt $\phi = \frac{s}{R}$ (Definition der Bogenlänge). Die Position von Konrad auf der Rutsche lässt sich dann beschreiben mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s(t)}{R}) \\ R\sin(\frac{s(t)}{R}) \\ h - \frac{h}{6\pi R}s \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten daraus die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{s}(t) \begin{pmatrix} -R\sin(\frac{s(t)}{R})\frac{1}{R} \\ R\cos(\frac{s(t)}{R})\frac{1}{R} \\ -\frac{h}{6\pi R} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet der Energierhaltungssatz

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}}(0) &= E_{\text{ges}}(t) \\ mgh &= mgz + \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 \\ mgh &= mg\left(h - \tfrac{h}{6\pi R}s\right) + \tfrac{1}{2}m\dot{s}^2\left(1 + \left(\tfrac{h}{6\pi R}\right)^2\right) \\ \Leftrightarrow \frac{mgh}{6\pi R}s &= \tfrac{1}{2}m\left(1 + \left(\tfrac{h}{6\pi R}\right)^2\right)\dot{s}^2 \\ \Leftrightarrow \dot{s} &= \alpha\sqrt{s} \end{aligned}$$

mit $\alpha = \sqrt{\frac{2gh}{6\pi R(1+\left(\frac{h}{6\pi R}\right)^2)}}$. Diese DGL lösen wir wieder durch Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \alpha\sqrt{s} \\ \Leftrightarrow \int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}} &= \alpha\int_0^t \mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{s} &= \alpha t \\ \Leftrightarrow s(t) &= \tfrac{1}{2}\alpha^2 t^2 \\ &= \frac{gh}{6\pi R(1+\left(\frac{h}{6\pi R}\right)^2)}t^2 \end{aligned}$$

Mit $s(t)$ ist auch $\mathbf{x}(t)$ bestimmt, wir erhalten die Bahnkurve durch einsetzen von s in die Gleichung für $\mathbf{x}$.

1.8 Impulserhaltung

N Personen der Masse m stehen auf einem Eisenbahnwaggon der Masse M, der sich zunächst in Ruhe befindet. Sie springen von einem Ende des Waggons mit der horizontalen Geschindigkeit u ab (d.h. nach dem Absprung ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Waggon und Person u). Der Waggon rolle in entgegengesetzte Richtung ohne Reibung.

(a) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Waggons wenn alle Personen gleichzeitig abspringen?

(b) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Waggons, wenn eine nach dem anderen abspringt?

(c) Zeigen Sie, dass im Fall (b) die Endgeschwindgkeit des Waggons größer ist als bei (a).

Lösung Es gilt Impulserhaltung da keine äußeren Kräfte wirken.
(a) Alle Personen springen gleichzeitig ab also muss nur eine Impulsbilanz betrachtet werden. Da u die Geschwindigkeit im Ruhesystem des Waggons ist, ist die Geschwidgkeit der Personen im Laborsystem $u - v$.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\text{Personen}} + \mathbf{p}_{\text{Waggon}} &= 0 \\ -Nm(u-v) + Mv &= 0 \\ \Leftrightarrow v &= \frac{Nmu}{M+Nm} \end{aligned}$$

(b) Wenn die erste Person abspringt, gilt die Impulsgleichung analog zu (a)

$$\begin{aligned} -m(u-v_1) + (M + (N-1)m)v_1 &= 0 \\ v_1 &= \frac{mu}{M + (N-2)m} \end{aligned}$$

Wenn die i-te Person abspringt, addiert sich ein Geschwindigkeitsbeitrag (betrachtet aus dem bewegten Bezugssystem mit Geschwindigkeit v_{i-1})

$$\begin{aligned} m(u-v_i) + (M + (N-i)m)v_i &= 0 \\ v_i &= \frac{mu}{M + (N-(i+1))m} \end{aligned}$$

Die Gesamtgeschwindigkeit des Waggons v lautet also

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{N} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{mu}{M + (N-(i+1))m} \end{aligned}$$

(c) Es gilt $M + (N-(i+1))m < M + Nm \quad \forall i \in \{1, .., N\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} v_b &= \sum_{i=1}^{N} \frac{mu}{M + (N-(i+1))m} \\ &> \sum_{i=1}^{N} \frac{mu}{M+Nm} \\ &= \frac{Nmu}{M+Nm} = v_a \end{aligned}$$

1.9 Kepler Problem⋆

Für das Keplerproblem $V(r) = -\frac{a}{r}$ ist neben Energie und Drehimpuls der Lenzsche Vektor $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - a\hat{\mathbf{r}}$ eine Erhaltungsgröße (Drehimpuls $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$).

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung das $\mathbf{M}$ tatsächlich eine Erhaltungsgröße ist d.h. $\dot{\mathbf{M}} = 0$. In welcher Ebene liegt $\mathbf{M}$?

(b) Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\mathbf{r} = (s, 0, 0), \dot{\mathbf{r}} = (0, v_0, 0)$. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung und die Erhaltung des Lenzschen Vektors und leiten Sie daraus die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda(\lambda - 1)sx + \lambda^2 s^2, \quad \lambda = \frac{msv_0^2}{a}$$

für die Bahnkurven ab. Für welche Parameter ergeben sich Parable, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?

Lösung (a) Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Drehimpulsvektor in die z-Richtung zeigt. Dann lässt sich die Geschwindigkeit zerlege (Zylinderkoordinaten)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

Damit erhalten wir für den Drehimpuls

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = mr\mathbf{e}_r \times \left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right) \\ = mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = mr^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z = mr^2\vec{\omega} \end{aligned}$$

mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - a\hat{\mathbf{r}}\right) \\ &= \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{r}} \times \underbrace{\dot{\mathbf{L}}}_{=0} - a\dot{\hat{\mathbf{r}}} \end{aligned}$$

Wir berechnen die beiden Teile separat. Für den ersten Term benutzen wir das dritte Newtonsche Axiom

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} &= -\tfrac{1}{m}\nabla V(r) \times \mathbf{L} \\ &= -\tfrac{1}{m}\frac{a}{r^2}\mathbf{e}_r \times mr^2\vec{\omega} \\ &= a\vec{\omega} \times \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Für den zweiten Term müssen wir die totale Zeitableitung des radialen Einheitsvektors bestimmen.

$$\begin{aligned} a\dot{\hat{\mathbf{r}}} = a\dot{\mathbf{e}}_r &= a\left(\partial_\phi \mathbf{e}_r\dot{\phi} + \partial_z\mathbf{e}_r\underbrace{\dot{z}}_{=0}\right) \\ &= a\mathbf{e}_\phi\dot{\phi} = a\dot{\phi}\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r \\ &= a\vec{\omega} \times \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Damit heben sich die beiden Terme gegenseitig auf und es gilt

$$\dot{\mathbf{M}} = 0.$$

Der Lenzsche Vektor liegt in der Bahnebene, denn er steht senkrecht zum Drehimpulsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} &= (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{L} - a\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{L} \\ &= \underbrace{(\mathbf{L} \times \mathbf{L}) \cdot \dot{\mathbf{r}}}_{=0} - \underbrace{a\frac{m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}}{r}}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei die Zyklizität des Spatprodukts ausgenutzt wurde.
(b) Wir berechnen zuerst mit den Anfangsbedingungen die Werte für die Erhaltungsgrößen.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{L}(0) = msv_0\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}(0) = (msv_0^2 - a)\mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Wir multiplizieren den Lenzschen Vektor mit dem Ortsvektor

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} &= (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - a\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} \\
&= \underbrace{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}_{\frac{\mathbf{L}}{m}} \cdot \mathbf{L} - ar \\
&= \frac{L^2}{m} - ar \\
&= \mathbf{M}(0) \cdot \mathbf{r} = (msv_0^2 - a)x
\end{aligned}
$$

Nun benutzen wir die Erhaltungsgrößen und lösen nach r auf

$$
\begin{aligned}
\frac{L^2}{m} - ar &= (msv_0^2 - a)x \\
\Leftrightarrow r &= \frac{\frac{L^2}{m} + (-msv_0^2 + a)x}{a} \\
\Leftrightarrow r &= \frac{L^2}{ma} - a\left(\frac{msv_0^2}{a} - 1\right)x \\
\Leftrightarrow r &= \lambda s - (\lambda - 1)x
\end{aligned}
$$

mit $\lambda = \frac{msv_0^2}{a}$. Wir setzen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und quadrieren die Gleichung

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \lambda^2 s^2 - 2\lambda s(\lambda - 1)x + (\lambda - 1)^2 x^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= ({}^2 - 2\lambda + 1 - 1)x^2 - 2\lambda(\lambda - 1)sx + \lambda^2 s^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= \lambda(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda(\lambda - 1)sx + \lambda^2 s^2
\end{aligned}
$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Für $\lambda = 1$ ergibt sich ein Kreis mit Radius s. Für $1 < \lambda < 2$ ergibt sich die Ellipse und für $\lambda = 2$ eine Parabel. Für $\lambda > 2$ ergibt sich eine Hyperbel.