Ferienkurs Experimentalphysik IV
Übung 4

Michael Mittermair und Daniel Jost

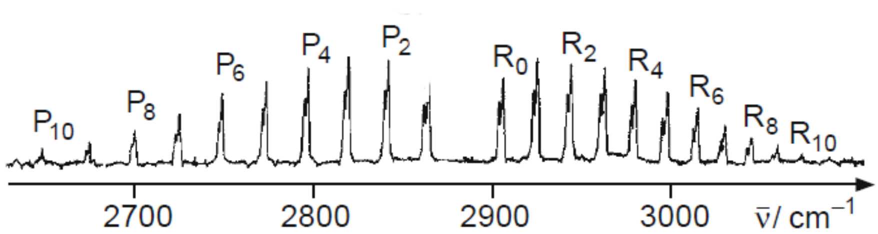
03.09.14

Aufgabe 1

Ein HCl-Molekül kann sowohl zu Schwingungen als auch zu Rotationen angeregt werden. Die Energie der Schwingungs-Rotations-Zustände ist gegeben durch

$$E = E_{vib} + E_{rot} = \hbar\omega(u + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2}{2I} \cdot j(j+1) \tag{1}$$

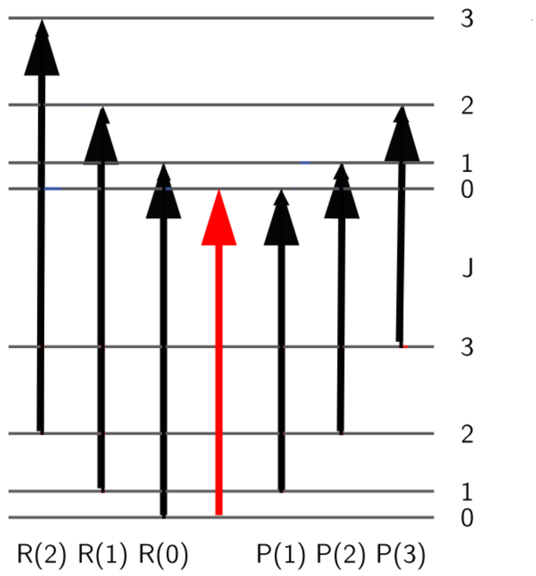
a) In der Abbildung sehen Sie ein gemessenes Spektrum von Schwingungsrotationszuständen. Es zerfällt in zwei Teile, den P-Zweig und den R-Zweig. Was charakterisiert P- bzw. R-Übergänge? Zeichnen Sie alle erlaubten Übergänge in ein Energieniveauschema für $u = 1, 2$ und $j = 0, 1, 2, 3$. Warum gibt es keinen Peak bei $\nu = 2880 cm^{-1}$?
Hinweis: $\Delta\nu = \pm 1$, $\Delta j = \pm 1$



b) Entwickeln Sie eine Formel für die reziproke Wellenlänge ν in Abhängigkeit des Drehimpulses und des Abstands der Atome.
Hinweis: Das Rotationsträgheitsmoment I hängt klassisch von der reduzierten Masse und dem Abstand zweier Körper ab.

c Berechnen Sie wie groß der Abstand R zwischen den beiden Atomen im Molekül ist ($m_{Cl} = 35,45u$) Bestimmen Sie dazu den mittleren Abstand der Absorptionspeaks aus der Messung.

Lösung 1



a) Für den P-Zweig gilt $\Delta j = -1$; für den R-Zweig $\Delta j = +1$. Im P-Zweig nimmt die Absorptionsenergie mit sinkendem j zu, im R-Zweig mit steigendem.
Der Übergang $J = 0 \rightarrow J = 0$ ist verboten. Daher fehlt diese Linie.

b) Die Energie eines Rotationszustandes hängt vom Erwartungswert des Gesamtdrehimpulses ab.

$$E == \hbar c 2\pi\nu = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2MR^2} \tag{2}$$

Man erhält dann für den Abstand zweier benachbarter Niveaus

$$\Delta E = hc\nu = \hbar c 2\pi\nu = \frac{\hbar^2[(J+1)(J+2) - J(J+1)]}{2MR^2} = \frac{\hbar^2(2J+2)}{2MR^2} \tag{3}$$

Nach Kürzen von Konstanten und Umstellen ergibt sich

$$\nu = \frac{h\bar{(}J+1)}{2\pi c M R^2} \tag{4}$$

c) Der Abstand zwischen zwei benachbarten Absorptionspeaks kann aus der Formel aus Aufgabe b hergeleitet werden.

$$\Delta\nu = \frac{\hbar((J+1+1)-(J+1))}{2\pi c M R^2} \tag{5}$$

Daraus lässt sich eine Formel für den Kernabstand ableiten

$$R = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi c M \Delta\nu}} \tag{6}$$

Mit $\Delta\nu = \frac{3000cm^{-1} - 2700cm^{-1}}{14} = 21,4cm^{-1}$ bekommt man einen Kernabstand von $R = 130pm$. Dies entspricht etwas mehr als dem doppelten Bohrschen Radius und ist somit plausibel.

Aufgabe 2

Bei einem CO-Molekül ist die potentielle Energie als Funktion des Abstandes r der Atomkerne durch die empirische Funktion

$$V(r) = D|1 - exp(-\beta(r - r_0))]|^2 \tag{7}$$

gegeben. Dabei ist $D = 9,4eV$ die Dissotiationsenergie und $r_0 = 1,128\AA$ der Gleichgewichtsabstand der Kerne ^{12}C und ^{16}O.

a) Die beobachtbare Frequenz für Schwingungsanregung des Moleküls beträgt $\nu = 6,499 \cdot 10^{13}s^{-1}$. Berechnen Sie daraus den Wert von β.
Hinweis: Entwickeln Sie die Exponentialfunktion im Potential bis zur 1. Ordnung, um das Potential eines harmonischen Oszillators zu erhalten.

b) Skizzieren Sie qualitativ die Energieniveaus der Zustände mit $n_1 = 0$; $l_1 = 0,1,2$ und $n_2 = 1$ $l_2 = 0,1,2$ wobei $n_{1,2}$ den Schwingungszustand und $l_{1,2}$ den Rotationszustand angibt. Skizzieren Sie anschließend die erlaubten Rotationsübergänge und berechnen Sie deren Frequenzen. Beachten Sie dabei, dass das Molekül nur um eine Achse senkrecht zur Molekülachse rotiert.

Lösung 2

a) Man entwickelt die Exponentialfunktion in Gleichung 7 bis zur ersten Ordnung:

$$-exp(-\beta(r-r_0)) \approx -1+\beta(r-r_0)+... \tag{8}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$V(r) \approx D|1-1+\beta(r-r_0)|^2 \tag{9}$$

und somit

$$V(r) \approx D\beta^2(r-r_0)^2 \tag{10}$$

$$V(r) \approx D\beta^2x^2 \qquad x := r-r_0 \tag{11}$$

Damit ist die Lösung analog zum harmonischen Oszillator mit

$$V_{Osz}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{12}$$

Bei zweiatomigen Molekülen muss die reduzierte Masse μ verwendet werden. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2 = D\beta^2 \tag{13}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu}{2D}} \tag{14}$$

Für die reduzierte Masse gilt

$$\mu = \frac{m_C m_O}{m_C+m_O} = \frac{12\cdot 16}{12+16}m_n \approx 6,86m_n \tag{15}$$

Mit $m_n = 1,67\cdot 10^{-27}kg$ und $\omega = 2\pi\nu = 4,1\cdot 10^{14}s^{-1}$ erhält man als Lösung

$$\beta = 2,53\cdot 10^{10}m^{-1} \tag{16}$$

b) Die Rotationsbedingung ist allgemein gegeben durch

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{17}$$

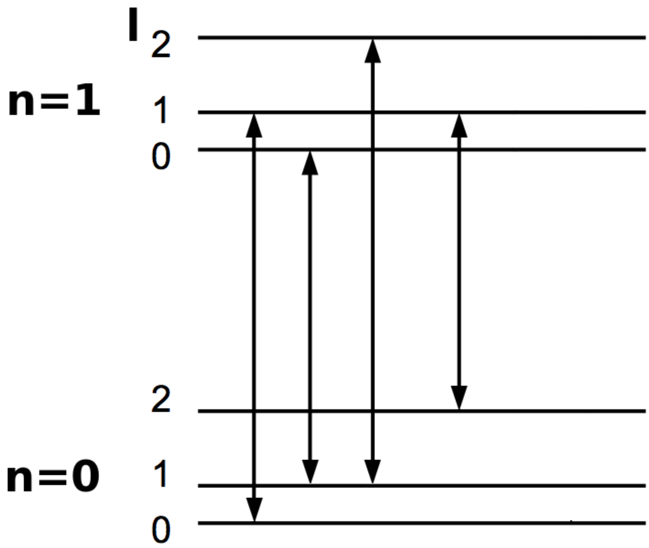
Für ein zweiatomiges Molekül mit Trägheitsmoment

$$I = \mu r_0^2 = 1,46\cdot 10^{-46}kgm^2 \tag{18}$$

wird ergibt sich

$$E_{rot} = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) = 4,76 \cdot 10^{-4} \cdot l(l+1) eV \tag{19}$$

Die erlaubten Übergänge sind $\Delta n = \pm 1, \Delta l = \pm 1$



Die Energiedifferenz ΔE_S zwischen den beiden Schwingungszuständen $n = 0, 1$ beträgt

$$\Delta E_S = \nu h = 0,2688 eV \tag{20}$$

Für den Übergang von $n_1 = 1, l_1 \rightarrow n_2 = 0, l_2$ gilt

$$\nu_{l_1,l_2} h = \Delta E_{l_1,l_2} = \Delta E_S + E_{rot}(l_1) - E_{rot}(l_2) \tag{21}$$

Die Frequenzen der Rotationsübergänge ergeben dann

$$\nu_{0,1} = \frac{0,2688 eV - 2 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} eV}{h} = 6,477 \cdot 10^{13} s^{-1} \tag{22}$$

$$\nu_{1,0} = \frac{0,2688 eV + 2 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} eV}{h} = 6,523 \cdot 10^{13} s^{-1} \tag{23}$$

$$\nu_{1,2} = \frac{0,2688 eV + 2 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} eV - 6 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} eV}{h} = 6,454 \cdot 10^{13} s^{-1} \tag{24}$$

$$\nu_{2,1} = \frac{0,2688 eV - 2 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} eV + 6 \cdot 4,76 \cdot 10^{-4} eV}{h} = 6,546 \cdot 10^{13} s^{-1} \tag{25}$$

(26)

Aufgabe 3

Auf Höhe der Meeresspiegels herrsche ein Luftdruck von einem bar und eine Temperatur von 20°C.

a) Berechnen Sie unter Annahme, dass Luft ein ideales Gas ist, die Dichte der Atmosphäre in Abhängigkeit der Höhe über dem Meeresniveau.

b) Nehmen Sie an, die Temperatur der Luft ändere sich nicht mit zunehmender Höhe. In welcher Höhe herrschen noch $\frac{2}{3}$ bzw. die Hälfte des Luftdrucks?

Lösung 3

a) Aus der idealen Gasgleichung erhalten wir

$$p = \frac{N}{V} k_B T = \rho k_B T \tag{27}$$

Damit gilt einerseits

$$dp = d\rho k_B T \tag{28}$$

Durch die Gravitation $F = -mg = -\rho M g A h$ gilt gleichzeitig

$$p = -\rho M g h \qquad \rightarrow \qquad dp = -\rho M g dh \tag{29}$$

M ist dabei Masse eines Teilchens

Zusammengefügt ergeben die Gleichungen

$$d\rho k_B T = -\rho M g dh \tag{30}$$

woraus sich eine bekannte Differentialgleichung ergibt

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{Mg}{k_B T} dh \tag{31}$$

Durch Integration beider Seiten ergibt sich

$$\rho(h) = \rho(0)e^{-\frac{Mgh}{k_BT}} \tag{32}$$

Nun gilt es noch den Eichwert für $\rho(0)$ zu bestimmen. Dazu werden die gegebenen Werte in die ideale Gasgleichung eingesetzt

$$\rho(0) = \frac{p_0}{k_BT_0} = 2,5 \cdot 10^{25}\frac{1}{m^3} \tag{33}$$

b)

$$p(h) = \rho(h)k_BT = \rho(0)e^{-\frac{Mgh}{k_BT}}k_BT \tag{34}$$

mit $p_0 = \rho(0)k_BT$ folgt $p(h) = p(0)e^{-\frac{Mgh}{k_BT}}$ Für den Fall mit $\frac{2}{3}$ gilt

$$\frac{2}{3}p_0 = p_0e^{-\frac{Mgh}{k_BT}} \tag{35}$$

$$ln\frac{2}{3} = -\frac{Mgh}{k_BT} \tag{36}$$

$$h = \frac{k_BT}{Mg}ln\frac{3}{2} \tag{37}$$

Mit $M = 29u = 29 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}kg$ folgt

$$h = 3,467km \tag{38}$$

Analog ergibt sich für den $\frac{1}{2}$-Fall

$$h = \frac{k_BT}{Mg}ln\frac{2}{1} \tag{39}$$

$$h = 5,927km \tag{40}$$

Aufgabe 4

Ein Behälter mit 1 mol Helium und ein gleich großer Behälter mit 1 mol Stickstoff werden jeweils mit der gleichen Heizleistung $P = 10W$ erwärmt. Die Wärmekapazität der Behälterwand beträgt jeweils $c_W = 10\frac{J}{K}$. Berechnen Sie, wie lange es dauert bis die Behälter von $T_1 = 20°C$ auf $T_2 = 100°C$ erwärmt sind. Wie lange dauert die Erwärmung von N_2 auf $1000°C$, wenn ab $500°C$ die Schwingungsfreiheitsgrade angeregt werden können?

Lösung 4

Nach dem Gleichverteilungssatz trägt jeder Freiheitsgrad[1] mit $\frac{1}{2}R$ zur Wärmekapazität eines Gases bei.
Für einatomige Gase[2]

$$c_V = \frac{3}{2}R \tag{41}$$

Für ein zweiatomiges Gas bei dem Rotationen angeregt werden gibt es zwei zusätzliche Komponenten

$$c_V = \frac{5}{2}R \tag{42}$$

Können außerdem eine Schwingung[3] angeregt werden erhält man

$$c_V = \frac{7}{2}R \tag{43}$$

Für die Änderung der Energie bei gleichbleibendem Volumen gilt

$$E = c_V n(T_2 - T_1) \tag{44}$$

Wir bekommen mit Hilfe der Heizleistung für Helium eine Aufheizzeit von

$$t = \frac{E}{P} = \frac{(nc_V + c_W)\Delta T}{P} = \frac{(\frac{3}{2}Rn + 10\frac{J}{K})(100-20)K}{10W} = 179,8s \tag{45}$$

Für Stickstoff als zweiatomiges Gas bekommen wir

$$t = \frac{E}{P} = \frac{(nc_V + c_W)\Delta T}{P} = \frac{(\frac{5}{2}Rn + 10\frac{J}{K})(100-20)K}{10W} = 246,3s \tag{46}$$

Wollen wir nun Stickstoff weiter erwärmen kommt ab $500°C$ der Freiheitsgrad der Schwingung zu tragen. Man bekommt

$$t_1 = \frac{(\frac{5}{2}Rn + c_W(500-100)K}{P} = 1231,4s \tag{47}$$

$$t_2 = \frac{(\frac{7}{2}Rn + c_W(1000-500)K}{P} = 1955s \tag{48}$$

$$t_{Gesamt} = t_1 + t_2 = 3186,4s \tag{49}$$

Die Schwingungen eines Moleküls sind quantisiert. Sie besitzen die Energie $\hbar\omega$. Liegt diese Energie oberhalb der thermischen Energie k_BT, so kann die Schwingung nicht angeregt werden (z.B. Vibrationsschwingung eines 2-atomigen Moleküls bei niedrigen Temperaturen.

[1] eigentlich jede Energiekomponente
[2] nur Translationen, also Richtungsimpulse als Energie
[3] hat immer zwei Komponenten, Kinetisch und Potentiell

Aufgabe 5

Ein Behälter sei mit $n = 2$ Mol idealen, einatomigen Gases gefüllt (Volumen V_0) und an ein Wärmereservoir mit Temperatur $T = 293K$ angeschlossen. Der Behälter sei oben mit einem beweglichen, masselosen Stempel der Fläche $A = 0,25m^2$ abgeschlossen. Außerhalb des Behälters herrsche Luftdruck $p_0 = 10^5 N/m^2$. Auf den Stempel wird langsam Sand bis zu einer Gesamtmasse m=500 kg gestreut. Hierbei bedeutet langsam, dass die Temperatur des Gases konstant bleibt, da es mit dem Wärmereservoir in Verbindung steht.

a) Wie groß sind Volumen V_1 und Druck p_1 des Gases, wenn der gesamte Sand auf dem Stempel liegt?

b) Wie groß ist die Wärmemenge, die dabei zwischen dem Wärmereservoir und dem Gas ausgetauscht wurde?

c) Durch Erwärmen des Gases soll der beladene Stempel nun auf die ursprüngliche Höhe gebracht werden. Welche Temperatur hat das Gas, wenn es das ursprüngliche Volumen V_0 einnimmt? Welche Wärmemenge wurde dem Gas hierfür zugefügt?

Lösung 5

a) Allgemein gilt

$$V_0 = \frac{nRT}{p_0} \tag{50}$$

Es handelt sich um einen isothermen Prozess. Damit gilt

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 \tag{51}$$

mit $p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 1196hPa$ ergibt sich

$$V_1 = \frac{nRT}{p_0 + \frac{mg}{A}} = 40,73l \tag{52}$$

b) Die Arbeit während des isothermen Prozesses ist

$$W_{isoterm} = -\int_{V_0}^{V_1} pdV = -nRT \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = -nRTln\frac{V_1}{V_0} \tag{53}$$

Da die Temperatur gleich bleibt, bleibt auch die innere Energie gleich. Damit gilt

$$0 = \Delta U = \Delta Q + W \tag{54}$$

und somit

$$\Delta Q = -W = nRTln\frac{V_1}{V_0} = nRTln\frac{p_0}{p_1} = nRTln\frac{p_0}{p_0 + \frac{mg}{A}} = -872,9J \tag{55}$$

Die Wärme wird also abgegeben.

c) Isobarer Prozess

$$\frac{T_2}{V_2} = \frac{T_1}{V_1} \tag{56}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{V_2}{V_1}T_1 = \frac{V_0}{V_1}T_1 = \frac{nRT}{p_0 V_1}T = 350,5K \tag{57}$$

Für den Wärmefluss gilt

$$\delta Q = nc_p dT = n(c_V + R)dT = n(\frac{3}{2}R + R)dt = \frac{5}{2}nRT \tag{58}$$

und somit

$$Q_{12} = \frac{5}{2}nR\int_{T_1}^{T_2} dt = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = 2390J \tag{59}$$

Aufgabe 6

In einem großen Presslufttank befindet sich Sauerstoff (Adiabatenkoeffizient $\kappa = 1,4$) bei Zimmertemperatur $T_0 = 293K$ unter einem Druck von $p_1 = 150$bar. Aus ihm wird eine Stahlflasche gefüllt, die anfangs ebenfalls Sauerstoff mit $T_0 = 293K$ und $p_0 = 1$bar enthält. Druck und Temperatur des Gases im Tank bleiben konstant. die Füllung der Flasche erfolge so rasch, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet und ihr Inhalt beim Schließen des Ventils unmittelbar nach dem Füllen die Temperatur T_1 hat.

a) Berechnen Sie das Verhältnis von zugeführter Gasmenge Δn zur ursprünglichen Gasmenge n in Abhängigkeit von T_0, T_1 und κ.

b) Wie lauten die Zustandsgleichungen des Gases in der Flasche vor und unmittelbar nach der Füllung? Berechnen Sie daraus ebenfalls $\frac{\Delta n}{n}$.

c) Welcher Druck p_2 herrscht in der geschlossenen Flasche nach Abkühlung auf T_0?

d) Wie groß sind T_1 und $\frac{\Delta n}{n}$?

Lösung 6

a) adiabatische Expansion

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta U \\ p_1 \Delta V &= (n + \Delta n) c_V (T_1 - T_0)\end{aligned}$$

Zustandsgleichung für Gasmenge Δn:

$$p_1 \Delta V = \Delta n R T_0 \tag{60}$$

Kombiniert ergibt das

$$\frac{n + \Delta n}{\Delta n} = \frac{R}{c_V} \frac{T_0}{T_1 - T_0} \tag{61}$$

Wir wissen

$$\begin{aligned}c_p - c_V &= R \\ \kappa &= \frac{c_p}{c_V} \\ \Rightarrow \frac{R}{c_V} &= \kappa - 1 \\ \Rightarrow \frac{R}{c_V} \frac{T_0}{T_1 - T_0} &= (\kappa - 1 \frac{T_0}{T_1 - T_0} \\ \Rightarrow \frac{n}{\Delta n} = (\kappa - 1 \frac{T_0}{T_1 - T_0} - 1 &= \frac{\kappa T_0 - T_1}{T_1 - T_0} \\ \frac{\Delta n}{n} &= \frac{T_1 - T_0}{\kappa T_0 - T_1}\end{aligned}$$

b) Vor dem Füllen: $p_0 V_0 = n R T_0$
Nach dem Füllen: $p_1 V_1 = (n + \Delta n) R T_1$
Wir erhalten

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(n + \Delta n) R T_1}{n R T_0} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta n}{n} = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} - 1 \tag{62}$$

c) Isochore Zustandsänderung $V = const \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}$ wobei $T_2 = T_0$ gilt

$$\frac{T_1 - T_0}{\kappa T_0 - T_1} = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} - 1 \tag{63}$$

$$\Rightarrow p_0 T_1(T_1 - T_0) = (p_1 T_0 - p_0 T_1)(\kappa T_0 - T_1)$$
$$\Rightarrow p_0 T_1^2 - p_0 T_0 T_1 = \kappa p_1 T_0^2 - \kappa p_0 T_0 T_1 - p_1 T_0 T_1 + p_0 T_1^2$$
$$\Rightarrow -p_0 = \kappa p_1 \frac{T_0}{T_1} - \kappa p_0 - p_1$$
$$\Rightarrow p_2 = \frac{1}{\kappa}(p_1 + \kappa p_0 - p_0) = \frac{1}{\kappa} p_1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} p_0$$

$$p_2 = \frac{150bar}{1,4} + \frac{1,4-1}{1,4} 1bar = 107,4bar \tag{64}$$

d)

$$T_1 = T_0 \frac{p_1}{p_2} = 409K \tag{65}$$
$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{p_2}{p_0} - 1 = 106,4 \tag{66}$$

Aufgabe 7

Der Kreisprozess im Ottomotor kann durch folgenden idealisierten Prozess angenähert werden:

I. Adiabatische Kompression des idealen Arbeitsgases vom Volumen V_1, der Temperatur T_1 und dem Druck p_1 zum Volumen V_2.

II. Isochore Druckerhöhung, indem das Gas mit einem Wärmebad der Temperatur T_3 in Berührung gebracht wird und der Temperaturausgleich abgewartet wird.

III. Adiabatische Expansion bis zum Anfangsvolumen V_1.

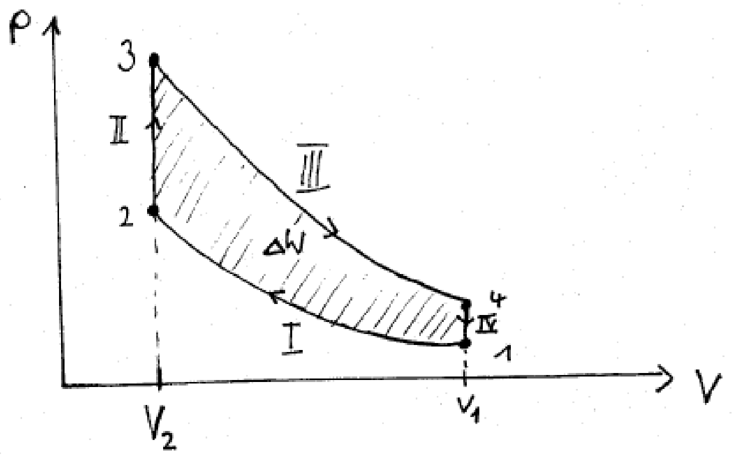
IV. Isochore Druckerniedrigung bis zum Anfangsdruck p_1, wobei das Gas durch Kontakt mit einem zweiten Wärmebad der Temperatur T_1 abgekühlt wird.

a) Wie sieht das p-V-Diagramm des Kreisprozesses aus? Berechnen Sie Drücke, Volumina und Temperaturen für die Anfangspunkte der vier Teilprozesse. ($V_1 = 1,5dm^3, \epsilon = \frac{V_1}{V_2} = 8, T_1 = 303K, p_1 = 1bar, T_3 = 1973K, \kappa = 1,4$)

b) Wie groß ist die pro Umlauf im p-V-Diagramm gewonnene Arbeit? Welche Leistung gibt ein Vierzylinder-Viertaktmotor bei einer Motordrehfrequenz von $f = 4500\frac{1}{min}$ ab? c_V soll als konstant angenommen werden.

c) Wie groß ist der Wirkungsgrad η_{rev} einer Carnot-Maschine, die mit den beiden Wärmebädern arbeitet? Wie groß ist der effektive Wirkungsgrad η des Motors? Zeigen Sie, dass dieser nur vom Kompressionsverhältnis ϵ abhängt.

Lösung 7



a) **I. Adiabate:** $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$ Mit der Gasgleichung folgt $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$.

Wir erhalten V_2 über das Kompressionsverhältnis

$$V_2 = \frac{V_1}{\epsilon} = \frac{1,5dm^3}{8} = 0,1875dm^3 \tag{67}$$

Dann verwenden wir die beiden Adiabatengleichungen

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = p_1 \epsilon^\kappa = 18,4bar \tag{68}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = T_1 \epsilon^{\kappa-1} = 696K \tag{69}$$

II. Isochore: Mit dem gegebenen T_3 und dem ausgrechneten T_2 bekommt man

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \tag{70}$$

$$\Rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 18,4bar \frac{1973}{696} = 52,1bar \tag{71}$$

während $V_3 = V_2$ gilt.

III. Adiabate:

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\kappa = p_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa = p_3 \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^\kappa = 2,84 bar \tag{72}$$

IV. Isochaore:

$$T_4 = T_1 \frac{p_4}{p_1} = 303K \frac{2,84}{1} = 859K \tag{73}$$

	1	2	3	4
$V[dm^3]$	$1,5$	$0,1875$	$0,1875$	$1,5$
$p[bar]$	$1,0$	$18,38$	$52,10$	$2,84$
$T[K]$	303	696	1973	859

b) Da man beim Kreisprozess zum Anfangszustand zurückkehrt, müssen die umgesetzte Wärme und Arbeit sich gegenseitig aufheben. Es gilt

$$|\Delta Q| = |\Delta W| \tag{74}$$

In I und III wird keine Wärme umgesetzt. Für die anderen beiden Prozesse gilt:

$$\Delta Q_{23} = n c_V (T_3 - T_2) > 0 \tag{75}$$
$$\Delta Q_{41} = n c_V (T_1 - T_4) < 0 \tag{76}$$

Aus der Gasgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} n &= \frac{p_1 V_1}{R T_1} \\ \Rightarrow C = n c_V = \frac{p_1 V_1}{T_1} c_V = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{c_V}{c_p - c_V} &= \\ = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\kappa - 1} = \frac{10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{303 \cdot (1,4 - 1)} = 1,238 \frac{J}{K} \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\Delta Q_{23} = 1,238 \frac{J}{K} (1973 - 696) K = 1580 J \tag{77}$$
$$\Delta Q_{41} = 1,238 \frac{J}{K} (303 - 859) K = -688 J \tag{78}$$

Die geleistete Arbeit pro Kreisumlauf gibt

$$\Delta W = -(\Delta Q_{23} + \Delta Q_{41}) = -892J \tag{79}$$

Bei einem Viertaktmotor wird der Kreislauf für jeden Zylinder einmal durchlaufen, während sich die Motorwelle zweimal um die eigene Achse dreht. Die Leistung ergibt sich damit zu

$$4 \cdot \frac{f}{2} \Delta W = 134kW \tag{80}$$

c) Thermodynamischer Wirkungsgrad einer Carnot-Maschine

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{303}{1973} = 84,6 \tag{81}$$

Für den Ottokreislauf gilt

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_{23}} = \frac{892}{1580} = 56,5 \tag{82}$$

Desweiteren gilt

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_{23}} = \tag{83}$$

$$= \frac{\Delta Q_{23} + \Delta Q_{41}}{\Delta Q_{23}} = \tag{84}$$

$$= 1 + \frac{\Delta Q_{41}}{\Delta Q_{23}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \tag{85}$$

Mit

$$T_1 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \tag{86}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \tag{87}$$

$$\tag{88}$$

bekommt man

$$\eta = 1 - \frac{1}{\epsilon^{\kappa-1}} \tag{89}$$