# Musterlösung 02/09/2014

## 1 Streuexperimente

(a) Betrachten Sie die Streuung von punktförmigen Teilchen an einer harten Kugel vom Radius $R$. Bestimmen Sie die Ablenkfunktion $\theta(b)$ unter der Annahme, dass die Projektilteilchen gemäß dem Reflexionsgesetz elastisch von der Oberfläche der Kugel abprallen.

(b) Berechnen Sie aus der Ablenkfunktion den Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ gemäß der in der Vorlesung angegeben Formel. Vereinfachen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Identität $\sin x = 2\sin x/2 \cos x/2$.

(c) Die Kugel befinde sich nun in einem Strahl aus Punktteilchen der Geschwindigkeit $v$ und Teilchendichte $n$. Wie viele Teilchen werden pro Sekunde insgesamt gestreut? Ist das Ergebnis plausibel?

## Lösung:

(a) Aus der Geometrie der Abbildung entnimmt man:

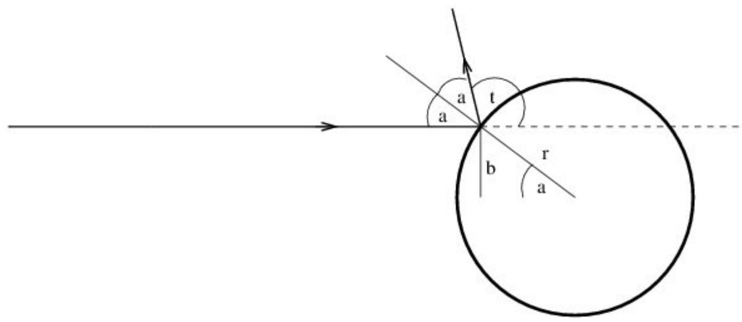


Abbildung 1

$$\theta = \pi - 2\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{b}{R}$$

Also

$$\theta(b) = \pi - 2\arcsin\frac{b}{R} = 2\arccos\frac{b}{R}$$

(b) Aus der invertierten Ablenkfunktion folgt der Streuquerschnitt.

$$\frac{\mathrm{d}œ}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{R^2}{4}$$

(c) Die Zahl der pro Sekunde gestreuten Teilchen $\dot{N}$ ist das Integral von

$$\mathrm{d}\dot{N} = L\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega$$

über alle Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$:

$$\dot{N}_{ges} = L\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin\theta\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$$

Die Luminosität ist Anzahl der Streuzentren mal Teilchenstromdichte:

$$L = 1\cdot nv = nv$$

Also ist die gesamte Streurate

$$\dot{N}_{ges} = nv\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin\theta\frac{R^2}{4} = \pi R^2 nv$$

## 2 Bohrsches Atommodell

Berechnen Sie nach dem Bohrschen Atommodell die Energieniveaus für ein Elektron eines $Li^{2+}$-Ions in Zuständen mit $n = 1, 2$. Die Kernbewegung sei hierbei vernachlässigbar.

## Lösung:

Mit der Gleichung

$$E_n = -13.6\frac{Z^2}{n^2}\mathrm{eV}$$

erhält man für $Z = 3$

$$E_1 = -122\mathrm{eV} \qquad E_2 = -30.6\mathrm{eV}$$

## 3 Myon-Atom

Ein Myon-Atom besteht aus einem Atomkern der Kernladungszahl $Z$ und einem eingefangenen Myon, das sich im Grundzustand befindet. Myonen sind Elementarteilchen mit $m_\mu = 207m_e$, $q = -e$ und einer Lebensdauer von $\tau_\mu = 2.2\cdot 10^{-6}s$.

(a) Berechnen Sie die Bindungsenergie eines Myons, das von einem Proton eingefangen wird.

(b) Berechnen Sie den Radius der Bohrschen Bahn mit $n = 1$.

(c) Wie groß ist die Energie des Photons, das ausgestrahlt wird, wenn ein Myon vom Zustand $n = 2$ in den Grundzustand übergeht?

## Lösung:

(a) Die Bindungsenergie eines Elektrons im Bohrschen Atommodell ist

$$E_n = -Ry^* \frac{Z^2}{n^2} \text{eV}$$

Die Rydbergenergie berechnet sich wie folgt:

$$Ry^* = \frac{e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Hier muss die Elektronenmasse durch die Myonmasse ersetzt werden. Insgesamt erhält man also

$$E_n^\mu = -2813 \frac{Z^2}{n^2} \text{eV}$$

(b)

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2 m_\mu} n^2 = 0.256 \frac{n^2}{Z} \text{pm}$$

(c) Energiedifferenz mit

$$h\nu = E_2^\mu - E_1^\mu = 2110 Z^2 \text{eV}$$

## 4 Wasserstoffatom

Zeigen Sie, dass die Grundzustands-Waserstoff-Wellenfunktion

$$\psi_{100}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right]$$

eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}\right] + U(r)\psi = E\psi$$

mit

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ist und bestimmen Sie den Ausdruck für $E_{100}$.

## Lösung:

Da der Grundzustand rotationssymmetrisch ist, ist es nicht nötig in der Schrödinger-Gleichung die Ableitung nach den Winkeln zu betrachten. Definiere $C = 1/\sqrt{\pi}(Z/a_0)^{3/2}$ und $k = 1/(4\pi\epsilon_0$. Dann gilt:

$$\frac{\partial\psi_{100}}{\partial r} = C\frac{\partial}{\partial r}\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right] = C\frac{Z}{a_0}\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right]$$

Multiplizieren beider Seiten mit $r^2$ und erhalte nach Differentiation nach $r$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi_{100}}{\partial r}\right) = -C\frac{Z}{a_0}\frac{\partial}{\partial r}r^2\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right] = \left[-\frac{2Zr}{a_0} + r^2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right]C\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right]$$

Eingesetzt in die Schrödingergleichung liefert das

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[-\frac{2Zr}{a_0} + r^2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right]C\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right] - \frac{kZe^2}{r}C\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right] = EC\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right]$$

Auflösen nach $E$ und Einsetzen von $a_0$ ergibt:

$$E = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[-\frac{2Zr}{a_0} + r^2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^2\right] - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$$

# 5 Spin-Bahn-Kopplung

Ein Elektron sei in einem Zustand mit Bahndrehimpuls **L** und Spinvektor **S**. Diese koppeln zu einem Gesamtdrehimpuls **J**.

(a) Wie ergeben sich die verschiedenen Vektoren auseinander?

(b) Welche möglichen Gesamtlängen haben die Vektoren? Was sind ihre möglichen Komponenten in einer gemeinsam ausgezeichneten Richtung? Verwenden Sie hierzu die nötigen Quantenzahlen. Welche Werte können diese im Wasserstoffatom annehmen?

(c) Berechnen Sie für die Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 1$ und die Spinquantenzahl $s = 1/2$ die Vektorlängen. Berechnen Sie den Winkel zwischen **L** und **S**

## Lösung:

(a) $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

(b)

$$|\mathbf{L}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

$$|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$$

$$|\mathbf{J}| = \hbar\sqrt{j(j+1)}$$

$$L_z = m_l\hbar$$

$$S_z = m_s\hbar$$

$$J_z = m_j\hbar$$

Im Wasserstoffatom gilt

$$l = 0, 1, n-1; \quad m_l = -l, ..., +l$$

$$s = 1/2; \quad m_s = \pm 1/2$$

$$j = \begin{cases} |l \pm 1/2, & l > 0 \\ 1/2, & l = 0 \end{cases} \qquad m_j = -j, .... + j$$

(c) Mit den angegeben Zahlen ergibt sich

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{2}\hbar$$

$$|\mathbf{S}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar \quad \text{fr} \quad j = \frac{3}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{fr} \quad j = \frac{1}{2}$$

Der Winkel ergibt sich wie immer mit

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{L}||\mathbf{S}|}$$

Den Ausdruck $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ kann man mittels

$$(\mathbf{L}+\mathbf{S})^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{LS} + \mathbf{S}^2$$

also

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) = \frac{\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

Eingesetzt erhält man insgesamt

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\frac{(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))}{\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} = \begin{cases} 0.408 \\ -0.816 \end{cases}$$

## 6 Zeeman-Effekt

(a) Erläutern Sie das Zustandekommen des normalen Zeeman-Effekts. In welchen Fällen reduziert sich der anomale auf den normalen Zeeman-Effekt und worin liegen deren Unterschiede?

(b) Welche guten Quantenzahlen sind zusätzlich zur Hauptquantenzahl $n$ und zur Spinquantenzahl $s$ notwendig zur vollständigen Beschreibung der Zustände beim anomalen Zeeman-Effekt?

(c) Betrachten Sie zwei angeregte Zustände in Natrium $Z = 11$ mit den spektroskopischen Symbolen $3^2D_{3/2}$ und $3^2P_{1/2}$. Für die Energieniveaus gilt $E(3^2D_{3/2} > E(3^2P_{1/2}$. Es wird nun ein schwaches Magnetfeld angelegt. Zeichnen Sie das Termschema für die beiden Zustände. Zeichnen Sie die erlaubten Zeeman-Übergänge ein unter Berücksichtigung der Auswahlregeln: $\Delta j = 0, \pm$, $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_j = 0, \pm$.

## Lösung:

(a) Die Bewegung des Elektrons um den Kern erzeugt einen Kreisstrom. Dieser bedingt ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$, das proportional zum Drehimpuls des Elektrons ist. In einem externen Magnetfeld $B$ besitzt das Elektron zusätzlich zur Coulomb-Energie die potentielle Energie $E_{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Die Zustände spalten in $2l + 1$ Zustände unterschiedlicher Energie auf.
Der Landé-Faktor ist abhängig von den Quantenzahlen des jeweiligen Zustands und die Aufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt also unterschiedlich stark für verschiedene Zustände. Beim normalen Zeeman-Effekt ist die Aufspaltung immer

gleich groß. Wenn sich der Gesamtspin $S = \sum s_i$ zu Null addiert tritt lediglich der normale Zeeman-Effekt zu Tage.

(b) Anomaler Zeeman-Effekt: $l, j, m_j$

(c) Siehe Abbildung.

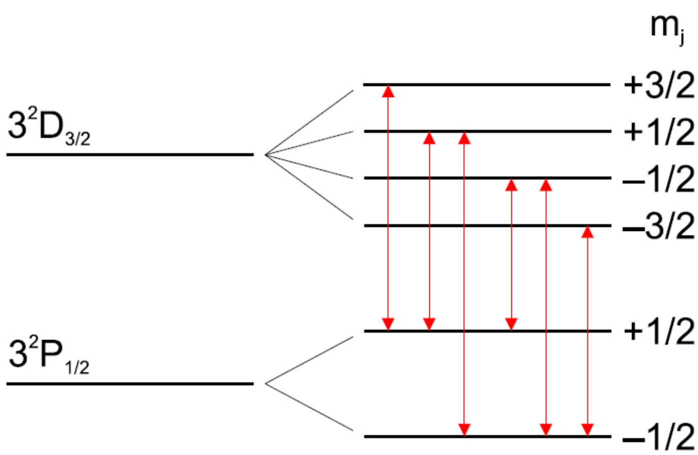


Abbildung 2

## 7 Übergänge

Zwei Elektronen bilden einen Gesamtspin $S = 1$ und einem Bahndrehimpuls $L = 2$.

(a) Welche möglichen Quantenzahlen hat der Gesamtdrehimpuls?

(b) Welchen Winkel bilden $S$ und $L$ für $J = 2$?
Betrachten Sie nun ein Wasserstoffatom mit Spin $S = 1/2$ in einem schwachen Magnetfeld.

(c) Kopieren und erweitern Sie die folgende Skizze, indem Sie die magnetisch induzierten Aufspaltungen sowie die erlaubten Übergänge einzeichnen. Vernachlässigen Sie dabei die unterschiedlichen Aufspaltungen beim anomalen Zeeman-Effekt.

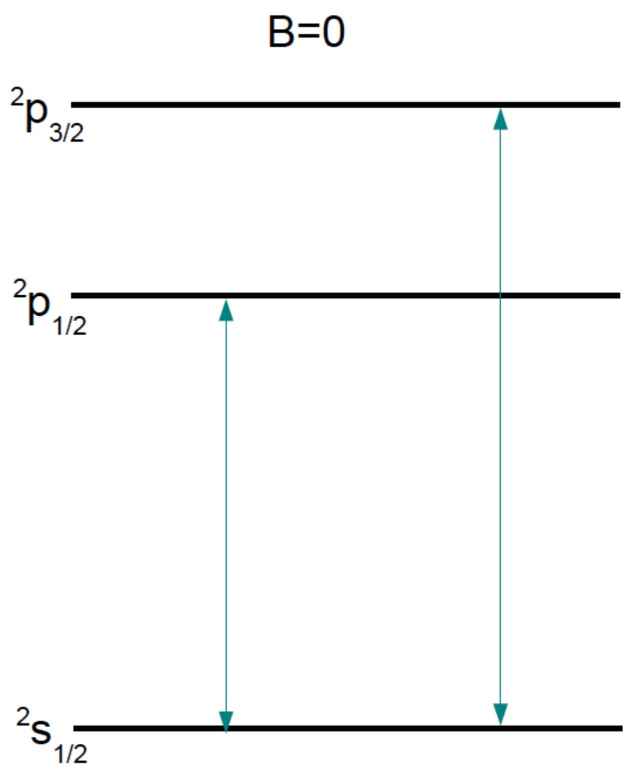


Abbildung 3

(d) Welches Magnetfeld braucht man, um einen Übergang von ${}^2S_{1/2}$, $m_j = \frac{1}{2}$ auf ${}^2S_{-1/2}$, $m_j = -\frac{1}{2}$ mit einer 3 cm Mikrowelle zu induzieren?

## Lösung:

(a) Für den Gesamtdrehimpuls gilt

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

Also hat der Gesamtdrehimpuls die möglichen Werte $J = 1, 2, 3$.

(b) Wie in der vorigen Aufgabe

$$\cos\alpha = \frac{j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)}{2\sqrt{s(s+1)}\sqrt{l(l+1)}} = 0.288$$

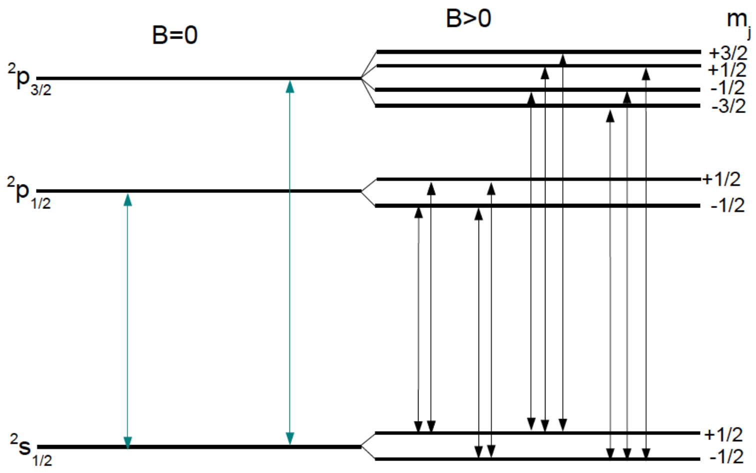


Abbildung 4

(c)

(d) Der $g$-Faktor ist gegeben durch

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

In diesem Fall beträgt er also

$$g_{1/2} = 2$$

Dann ist die Energie der Mikrowelle gegeben durch

$$\Delta E = h\nu = \Delta m_j \mu_B B g_j$$

Mit einer Frequenz von $\nu = c/\lambda = 10^{10}\ s^{-1}$ und $\Delta m_j$ ist dann also das Magnetfeld

$$B = \frac{h\nu}{2\mu_B} = 0.3\ \mathrm{T}$$