Musterlösung 01/09/2014

1 Quickies

(a) Warum spielen die Welleneigenschaften bei einem fahrenden PKW ($m = 1$t, $v = 100$km/h) keine Rolle?

(b) Wie groß ist die Energie von Lichtquanten mit einer Wellenlänge von $\lambda_1 = 500^{-}$m, $\lambda_2 = 500$nm und $\lambda_3 = 0.5$nm?

(c) Kann man den Aufenthaltsort eines quantenmechanischen Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt vorherbestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Welche physikalische Bedeutung besitzt die Normierung der Schrödingergleichung?

(e) Welche physikalischen Phänomene kennen Sie, die nicht klassisch aber quantenmechanisch erklärt werden können?

Lösung:

(a) Gesucht ist die de-Broglie-Wellenlänge des PKWs:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2 \cdot 10^{-38}\text{m}$$

λ ist zu klein, um quantenmechanische Beobachtungen wie Beugung und Interferenz machen zu können.

(b) Für die Energie eines Teilchens mit gegebener Wellenlänge gilt

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

was für die gefragten Werte folgende Ergebnisse liefert:

λ in nm	E in meV
500000	2.5
500	2500
0.5	2.5 k

(c) Nein. Die Schrödingergleichung, oder vielmehr ihr Absolutquadrat, liefert lediglich die Aufenthaltwahrscheinlichkeit ein Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden.

(d) Die Normierung der Wellenfunktion sagt, dass man das Teilchen in jedem Fall irgendwo antreffen kann. Das bedeutet die Integration über den gesamten Ortsraum liefert die Wahrscheinlichkeit 1 das Teilchen anzutreffen.

(e) Tunneleffekt, diskrete Energiezustände in Atomen, etc.

2 Welle-Teilchen-Dualismus

(a) Betrachten Sie einen Körper der Masse 5g mit einer Geschwindigkeit $v = 100\text{m/s}$. Welche Breite müsste ein Spalt haben um Beugungsmuster zu beobachten? Ist dies physikalisch realisierbar?

(b) Ein Neutron werde an einem Atomkern der Größe $9 \cdot 10^{-15}$m gestreut. Welche Energie besitzt das Neutron?

Lösung:

(a) Wieder via de-Broglie-Beziehung:

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.325 \cdot 10^{-33}\text{m}$$

Ein solcher Spalt ist technisch und physikalisch nicht realisierbar.

(b) Aus der de-Broglie-Beziehung lässt sich der Impuls und daraus die Geschwindigkeit des Neutrons ermitteln:

$$v = \frac{h}{\lambda \cdot m_n} = 4.37 \cdot 10^7\text{m/s}$$

Für die Energie ergibt sich dann wie üblich $E = 1/2mv^2 \approx 10\text{MeV}$.

3 Bragg-Winkel

Ein Strahl langsamer Neutronen ($E_{kin} = 2\text{eV}$) fällt auf einen Kristall mit Gitterabstand $d = 1.6 \cdot 10^{-10}m$. Bestimmen Sie den Bragg-Winkel für das Intensitätsmaximum 1. Ordnung.

Lösung:

Aus der de-Broglie-Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

und der Bragg-Bedingung

$$2 \cdot d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$$

folgt für den Bragg-Winkel des Intensitätsmaximums 1. Ordnung

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2 \cdot d} \;\Leftrightarrow\; \theta = 3.6^\circ$$

4 Unschärferelation

(a) Angenommen der Impuls eines Teilchens wird mit der Genauigkeit 1 : 1000 gemessen. Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein makroskopisches Teilchen der Masse 5g mit der Geschwindigkeit 2m/s handelt? Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein Elektron der Geschwindigkeit 10^4km/s handelt?

(b) Wie groß ist die minimale Energieunschärfe eines Wasserstoffatoms, das sich in einem angeregten Zustand mit der Lebensdauer 10^{-8}s befindet?

Lösung:

(a) Mit der Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar$$

und mittels der Angabe $\Delta p = \epsilon p$ mit $\epsilon = 0.001$ erhält man für die minimale Ortsunschärfe

$$\Delta x \geq 1.05 \cdot 10^{-29}\text{m}$$

Für das Elektron mit angegebener Geschwindigkeit erhält man

$$\Delta x \geq 1.16 \cdot 10^{-8}\text{m}$$

Diese Ortsunschärfe ist im Gegensatz zu der des makroskopischen Objekts nicht vernachlässigbar.

(b) Analog zum vorherigen Aufgabenteil wird nun die Energieunschärfe mittels der Unschärferelation für Energie und Zeit berechnet:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Einsetzen der entsprechenden Werte liefert

$$\Delta E = 6.59 \cdot 10^{-8} \text{eV}$$

5 Wellenpaket

(a) Betrachten Sie ein Elektron mit dem Impuls $p = \hbar k$ in x-Richtung. Wie lautet die zugehörige Wellenfunktion $\psi(x, t)$?

(b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwelle aus (a), indem Sie eine Stelle fester Phase im Laufe der Zeit durch den Raum verfolgen. Wie verhält sich die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Welle zur Geschwindigkeit $v_T = p/m$ des Elektrons?

Lösung:

(a) Die (nicht-normierte) Wellenfunktion zu einem eindeutig bestimmten Impuls p ist die ebene Welle

$$\psi(x) = \exp[\mathrm{i}kx]$$

mit $k = p/\hbar$. Ihre freie zeitliche Entwicklung ist

$$\psi(x, t) = \exp\left[-\mathrm{i}(\omega(k)t - kx)\right]$$

mit $\omega = E/\hbar$ und $E = p^2/2m$ also $\omega(k) = \hbar k^2/2m$. Insgesamt erhält man:

$$\psi(x, t) = \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\hbar k^2}{2m}t - kx\right)\right]$$

(b) Konstante Phase bedeutet

$$\frac{\hbar k^2}{2m}t - kx = \text{const.} \Leftarrow x = \frac{\hbar k}{2m}t + const.$$

Die Phasengeschwindigkeit erhält man durch die erste Ableitung nach der Zeit, wie gehabt:

$$v_{ph} = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}v_T$$

6 Quantenmechanische Wellenfunktion

Betrachten Sie die quantenmechanische Wellenfunktion

$$\psi(x) = N \cdot \exp\left[-\frac{|x|}{a}\right], \qquad a > 0 \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N mit der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\psi|^2 = 1 \tag{2}$$

Welche Einheit hat die Wellenfunktion und warum ist die Normierung wichtig für die Interpretation in der Quantenmechanik?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Intervall $[0, \mathrm{d}x]$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Intervall $[0, a]$ zu finden?

Lösung:

(a) Einsetzen von Gleichung 1 in die Normierungsbedingung 2 unter Berücksichtigung der Betragsfunktion im Exponenten liefert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\psi|^2 = |N|^2 \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left[-\frac{2x}{a}\right] =$$

$$= 2|N|^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \left[\exp\left[-\frac{2x}{a}\right]\right]_0^{\infty} = |N|^2 a = 1$$

Für den Normierungsfaktor ergibt sich also

$$N = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

und damit für die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left[-\frac{|x|}{a}\right]$$

Nur wenn die Wellenfunktion normiert ist, lässt sich das Absolutquadrat als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren. Die Einheit der Wellenfunktion ist identisch mit der Einheit ihrer Amplitude, respektive ihres Normierungsfaktors, also gerade $1/\sqrt{m}$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit das Teilchen exakt an einem Ort zu finden ist Null. Für das infinitesimale Intervall $[0, \mathrm{d}x]$ kann man die Wahrscheinlichkeitsdichte am Ort 0 mit $\mathrm{d}x$ multiplizieren:

$$w = |\psi(0)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

Das ist eine gültige Näherung für $\mathrm{d}x << a$. Für ein größeres Intervall muss entsprechend das Integral ausgewertet werden:

$$W = \int_0^a \mathrm{d}x \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left[-\frac{|x|}{a}\right]\right|^2 = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{d}x \exp\left[-\frac{2x}{a}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \exp^{-2}\right) = 0.432$$

7 Potentialkasten

Gegeben sei ein eindimensionales Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, \text{ für } & 0 < x < a \\ \infty, \text{ sonst} \end{cases}$$

in dem sich ein kräftefreies Teilchen befinde.

(a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion ψ_n.

(b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte E_n.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes x und des Impulsoperators $\hat{p}$.

(d) Berechnen Sie die Energieunschärfe $\Delta\hat{\mathcal{H}}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Für die Energieunschärfe gilt:

$$\Delta\hat{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle\hat{\mathcal{H}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{H}}\rangle^2}$$

Lösung:

(a) Das Teilchen hält sich ausschließlich im Potentialkasten auf, weswegen sich die Schrödingergleichung wie folgt liest:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = E\psi$$

Mit der Beziehung $E = k^2\hbar^2/2m$ kann an die Gleichung zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - k^2\psi = 0$$

umschreiben. Mit dem Ansatz

$$\psi(x) = A \exp\left[\mathrm{i}kx\right] + B \exp\left[-\mathrm{i}kx\right]$$

und den Randbedingungen $\psi(0) = 0$ und $\psi(a) = 0$ erhält man schließlich

$$\psi(0) = A + B = 0 \;\Leftarrow \psi = A\left(\exp\left[\mathrm{i}kx\right] - \exp\left[-\mathrm{i}kx\right]\right) = 2\mathrm{i}A\sin(kx)$$

und damit:

$$\psi(a) = 2\mathrm{i}A\sin(ka) = 0$$

Der Ausdruck der zweiten Randbedingung verschwindet für Vielfache von π des Arguments im Sinus:

$$ka = n\pi, \quad n \in \mathtt{R}$$

Das bedeutet die Wellenfunktion ist gegeben via

$$\psi_n = 2\mathrm{i}A\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Mit der Normierungsbedingung erhält man zusätzlich einen eingängigeren Ausdruck für A:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

(b) Einsetzen der in (a) erhaltenen Wellenfunktion in die Schrödingergleichung liefert die Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

(c) Erwartungswert des Ortes ist

$$\langle x\rangle = \int_0^a \mathrm{d}x\ \psi_n^* x \psi_n = \int_0^a \mathrm{d}x\ x\ |\psi_n|^2 = \frac{a}{2}$$

und der des Impulsoperators:

$$\langle\hat{p}\rangle = \int \mathrm{d}x\ \psi_n^*\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_n = 0$$

(d) Zur Berechnung der Energieunschärfe benötigt man die Erwartungswerte von $\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle$ und $\langle\hat{\mathcal{H}}^2\rangle$:

$$\langle\hat{\mathcal{H}}\rangle = \int_{\mathtt{R}} \mathrm{d}x\ \psi_n^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi_n = \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2ma^2} = E_n$$

$$\langle \hat{\mathcal{H}}^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \; \psi_n^* \left(\frac{\hbar^4}{4m^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \psi_n = \left(\frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} \right)^2 = E_n^2$$

Eingesetzt in die im Hinweis angegebene Gleichung erhält man insgesamt:

$$\Delta \hat{\mathcal{H}} = \sqrt{E_n^2 - E_n^2} = 0$$

Die Energie ist also scharf messbar.

8 Potentialbarriere

Betrachten Sie die abgebildete stückweise konstante Potentiallandschaft in Abbildung 1. Ein von rechts einlaufendes Teilchen habe die Masse m und die Energie E mit $0 < E < V_0$.

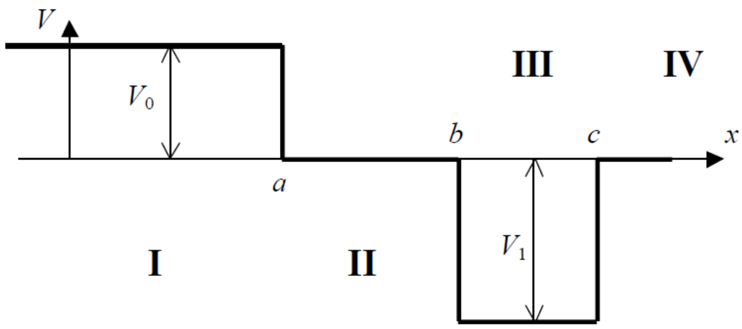

Abbildung 1

(a) Geben Sie die Ansätze für die Wellenfunktionen für die verschiedenen Regionen I-IV an und verwenden Sie dabei $\hbar$, m, V_0, V_1 und E. Die Schrödingergleichung muss nicht gelöst werden.

(b) Stellen Sie die Anschlussbedingung für $x = c$ auf.

(c) Unter der Annahme, dass in Bereich III gebundene Zustände existieren, stellen Sie wie in Aufgabe (a) die Lösungen für die vier Regionen auf.

Lösung

(a) Für die verschiedenen Regionen lassen sich folgende Ansätze aufstellen:

$$\psi(x) = \begin{cases} G\exp[\kappa x], & \text{Region I und } \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = V_0 - E \\ E\exp[\mathrm{i}kx] + F\exp[-\mathrm{i}kx], & \text{Region II und } \frac{\hbar^2k^2}{2m} = E \\ C\exp[\mathrm{i}qx] + D\exp[-\mathrm{i}qx], & \text{Region III und } \frac{\hbar^2q^2}{2m} = E + V_1 \\ A\exp[\mathrm{i}kx] + B\exp[-\mathrm{i}kx], & \text{Region I und } \frac{\hbar^2k^2}{2m} = E \end{cases}$$

(b) Stetigkeit von ψ und der ersten Ableitung ergibt

$$C\exp[iqc] + D\exp[-iqc] = A\exp[ikc] + B\exp[-ikc]$$

$$iq(-C\exp[iqc] + D\exp[-iqc]) = ik(-A\exp[ikc] + B\exp[-ikc])$$

(c) Wenn gebundene Zustände in Region III existieren, muss die Energie des Teilchens $V_1 < E_2 < 0$ sein. Die dazugehörigen Wellenfunktionen sind:

$$\psi(x) = \begin{cases} G\exp[\kappa' x], & \text{Region I und } \frac{\hbar^2\kappa'^2}{2m} = V_0 - E_2 \\ E\exp[-\kappa x] + F\exp[\kappa x], & \text{Region II und } \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = E_2 \\ C\exp[\mathrm{i}q' x] + D\exp[-\mathrm{i}q' x], & \text{Region III und } \frac{\hbar^2q'^2}{2m} = V_1 - E_2 \\ A\exp[-\kappa x], & \text{Region I und } \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = E_2 \end{cases}$$

9 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

(a) Gegeben sei nun die Wellenfunktion

$$\psi_\lambda(x) = A\exp[-\lambda x^2]$$

Berechnen Sie hiermit den Erwartungswert des Hamiltonoperators. Verwenden Sie

$$\int \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{a}{\pi}}\exp\left[-ax^2\right] = 1$$

Betrachten Sie nun ein Teilchen, auf das die Kraft $K = -kx + k_0$ mit $k = m_0\omega^2$ wirkt.

(b) Stellen Sie die dazugehörige Schrödingergleichung auf. Zeigen Sie, dass es sich um einen harmonischen Oszillator handelt.

(c) Geben Sie die Energieeigenwerte des Teilchens an.

Lösung

(a) Normierung der Wellenfunktion liefert zunächst

$$\int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x \; |\psi_\lambda|^2 = \int \mathrm{d}x \; |A|^2 \exp\left[-2\lambda x^2\right] = 1 \;\rightarrow\; A = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)$$

Man kann nun den Erwartungswert $\langle \hat{\mathrm{H}} \rangle = E_\lambda$ berechnen:

$$\langle \hat{\mathrm{H}} \rangle = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{0.5} \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x \; \exp\left[-\lambda x^2\right] \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right] \exp\left[-\lambda x^2\right] =$$

$$= \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{0.5} \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}x \; \exp\left[-\lambda x^2\right] \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(4\lambda^2 x^2 - 2\lambda) - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right] =$$

$$\frac{1}{8}m\omega^2\frac{1}{\lambda} + \frac{\hbar^2}{2m}2\lambda$$

(b) Das Potential erhält man durch einfache Integration, da $V(x) = -\nabla K$:

$$V(x) = -\int (-kx + k_0)\mathrm{d}x = \frac{k}{2}x^2 - k_0 x (+C)$$

Durch Umformen mit $x_0 = \frac{k_0}{k}$ und $\epsilon_0 = \frac{k_0^2}{2k}$ ergibt sich:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 - \epsilon_0$$

Dieses Potential setzt man nun in die Schrödingergleichung ein:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m_0\omega^2(x - x_0)^2 - \epsilon_0\right]\psi = E\psi$$

Um zu zeigen, dass es sich um einen harmonischen Oszillator handelt, ersetzt man $y = x - x_0$ und $\hat{E} = E + \epsilon_0$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m_0\omega^2 y^2\right]\psi = \hat{E}\psi$$

(c) Die Energieeigenwerte sind entsprechend verschoben:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{k}$$

10 Kommutatorrelation

Der Drehimpulsoperator ist

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

(a) $\left[L_y, L_z\right]$

(b) $\left[\mathbf{L}^2, L_z\right]$

Lösung:

(a)

$$\left[L_y, L_z\right] = (xi\hbar\partial_z - zi\hbar\partial_x) \cdot (-xi\hbar\partial_z + yi\hbar\partial_x) - (-xi\hbar\partial_z + yi\hbar\partial_x) \cdot (xi\hbar\partial_z - zi\hbar\partial_x) = \mathrm{i}\hbar L_x$$

(b) Man nutzt Eigenschaften der Kommutatorrelation:

$$\left[\mathbf{L}^2, L_z\right] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z] = 0$$