Musterlösung 01/09/2014

1 Quickies

(a) Warum spielen die Welleneigenschaften bei einem fahrenden PKW ($m = 1$t, $v = 100$km/h) keine Rolle?

(b) Wie groß ist die Energie von Lichtquanten mit einer Wellenlänge von $\lambda_1 = 500^{-}$m, $\lambda_2 = 500$nm und $\lambda_3 = 0.5$nm?

(c) Kann man den Aufenthaltsort eines quantenmechanischen Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt vorherbestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Welche physikalische Bedeutung besitzt die Normierung der Schrödingergleichung?

(e) Welche physikalischen Phänomene kennen Sie, die nicht klassisch aber quantenmechanisch erklärt werden können?

2 Welle-Teilchen-Dualismus

(a) Betrachten Sie einen Körper der Masse 5g mit einer Geschwindigkeit $v = 100$m/s. Welche Breite müsste ein Spalt haben um Beugungsmuster zu beobachten? Ist dies physikalisch realisierbar?

(b) Ein Neutron werde an einem Atomkern der Größe $9 \cdot 10^{-15}$m gestreut. Welche Energie besitzt das Neutron?

3 Bragg-Winkel

Ein Strahl langsamer Neutronen ($E_{kin} = 2$eV) fällt auf einen Kristall mit Gitterabstand $d = 1.6 \cdot 10^{-10}m$. Bestimmen Sie den Bragg-Winkel für das Intensitätsmaximum 1. Ordnung.

4 Unschärferelation

(a) Angenommen der Impuls eines Teilchens wird mit der Genauigkeit $1 : 1000$ gemessen. Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein makroskopisches Teilchen der Masse 5g mit der Geschwindigkeit 2m/s handelt?

Wie groß ist die minimale Ortsunschärfe, wenn es sich um ein Elektron der Geschwindigkeit 10^4km/s handelt?

(b) Wie groß ist die minimale Energieunschärfe eines Wasserstoffatoms, das sich in einem angeregten Zustand mit der Lebensdauer 10^{-8}s befindet?

5 Wellenpaket

(a) Betrachten Sie ein Elektron mit dem Impuls $p = \hbar k$ in x-Richtung. Wie lautet die zugehörige Wellenfunktion $\psi(x, t)$?

(b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwelle aus (a), indem Sie eine Stelle fester Phase im Laufe der Zeit durch den Raum verfolgen. Wie verhält sich die Phasengeschwindigkeit v_{ph} der Welle zur Geschwindigkeit $v_T = p/m$ des Elektrons?

6 Quantenmechanische Wellenfunktion

Betrachten Sie die quantenmechanische Wellenfunktion

$$\psi(x) = N \cdot \exp\left[-\frac{|x|}{a}\right], \qquad a > 0 \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N mit der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |\psi|^2 = 1 \tag{2}$$

Welche Einheit hat die Wellenfunktion und warum ist die Normierung wichtig für die Interpretation in der Quantenmechanik?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Intervall $[0, \mathrm{d}x]$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen in einem Intervall $[0, a]$ zu finden?

7 Potentialkasten

Gegeben sei ein eindimensionales Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, \text{ für } & 0 < x < a \\ \infty, \text{ sonst} & \end{cases}$$

in dem sich ein kräftefreies Teilchen befinde.

(a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion ψ_n.

(b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte E_n.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Ortes x und des Impulsoperators $\hat{p}$.

(d) Berechnen Sie die Energieunschärfe $\Delta\hat{\mathcal{H}}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Für die Energieunschärfe gilt:

$$\Delta\hat{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle\hat{\mathcal{H}}^2\rangle - \langle\hat{\mathcal{H}}\rangle^2}$$

8 Potentialbarriere

Betrachten Sie die abgebildete stückweise konstante Potentiallandschaft in Abbildung 1. Ein von rechts einlaufendes Teilchen habe die Masse m und die Energie E mit $0 < E < V_0$.

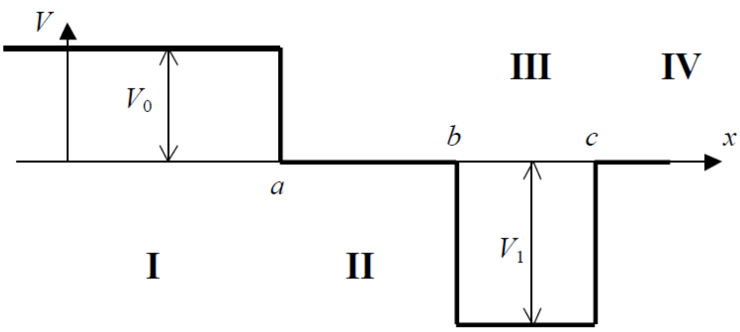

Abbildung 1

(a) Geben Sie die Ansätze für die Wellenfunktionen für die verschiedenen Regionen I-IV an und verwenden Sie dabei $\hbar$, m, V_0, V_1 und E. Die Schrödingergleichung muss nicht gelöst werden.

(b) Stellen Sie die Anschlussbedingung für $x = c$ auf.

(c) Unter der Annahme, dass in Bereich III gebundene Zustände existieren, stellen Sie wie in Aufgabe (a) die Lösungen für die vier Regionen auf.

9 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

(a) Gegeben sei nun die Wellenfunktion

$$\psi_\lambda(x) = A\exp[-\lambda x^2]$$

Berechnen Sie hiermit den Erwartungswert des Hamiltonoperators. Verwenden Sie

$$\int \mathrm{d}x\, \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp\left[-ax^2\right] = 1$$

Betrachten Sie nun ein Teilchen, auf das die Kraft $K = -kx + k_0$ mit $k = m_0\omega^2$ wirkt.

(b) Stellen Sie die dazugehörige Schrödingergleichung auf. Zeigen Sie, dass es sich um einen harmonischen Oszillator handelt.

(c) Geben Sie die Energieeigenwerte des Teilchens an.

10 Kommutatorrelation

Der Drehimpulsoperator ist

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

(a) $\left[L_y, L_z\right]$

(b) $\left[\mathbf{L}^2, L_z\right]$