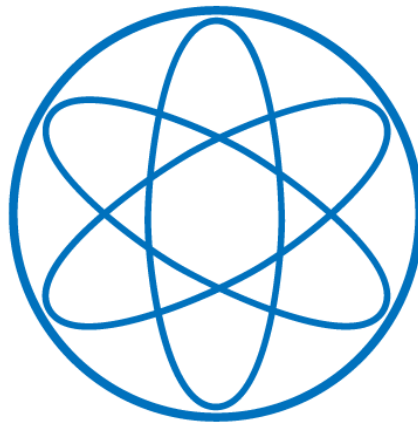


**Ferienkurs**  
**Experimentalphysik 2**

**Sommer 2014**

**Probeklausur - Lösung**



**PHYSIK**  
**DEPARTMENT**

## Aufgabe 1: Punktförmige Ladungsverteilung

1. Ein Elektron in der Nähe der Erdoberfläche wird durch ein über ihm befindliches Proton in der Schwebelage gehalten, wobei die Gewichtskraft des Elektrons durch die elektrostatische Anziehung des Protons genau kompensiert wird. Wie groß ist der Abstand zwischen Elektron und Proton? Die Protonladung ist  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ , die Elektronenmasse  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$  und die elektrische Feldkonstante ist  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C/Nm}^2$ .
2. Wie lautet das elektrostatische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  einer Ladung  $q$ , die sich am Ort  $\vec{r}_q$  befindet?
3. Gegeben seien vier gleiche Ladungen  $q$ , von denen sich zwei auf der x-Achse bei  $x = \pm a$  und zwei auf der y-Achse bei  $y = \pm a$  befinden. Bestimmen Sie das von diesen Ladungen erzeugte elektrostatische Feld auf der z-Achse.

### Lösung:

1. Der Abstand  $r$  zwischen Elektron und Proton muss so groß sein, dass die elektrostatische Anziehung das Gewicht des Elektrons kompensiert, d.h:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = m_e g \quad (1)$$

also:

$$r = \frac{e}{\sqrt{4\epsilon_0 m_e g}} = 5,1 \text{m} \quad (2)$$

2. Das Feld einer Punktladung  $q$  im Ursprung ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3)$$

Das Feld einer um den Vektor  $\vec{r}_q$  aus dem Ursprung verschobenen Ladung geht daraus durch die Ersetzung  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_q$  hervor. Also:

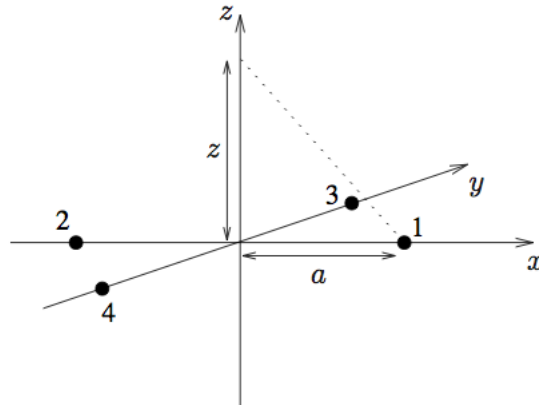
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} \quad (4)$$

3. Wir nummerieren die Ladungen mit 1 bis 4 wie aus der folgenden Abbildung ersichtlich:  
Dann ist gemäß 2. das Feld, das die Ladung 1 an einem Ort auf der z - Achse bewirkt, gegeben durch:

$$\vec{E}_1(0, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\vec{e}_z - a\vec{e}_x}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Analog ist das Feld von Ladung 2 am selben Ort:

$$\vec{E}_2(0, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\vec{e}_z + a\vec{e}_x}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (6)$$



Und das von Ladung 3:

$$\vec{E}_3(0, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\vec{e}_z - a\vec{e}_y}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Und von Ladung 4:

$$\vec{E}_4(0, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\vec{e}_z + a\vec{e}_y}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (8)$$

Das Gesamtfeld am Ort  $(0, 0, z)$  ist die Summe der von den einzelnen Ladungen erzeugten Felder (Superpositionsprinzip), also:

$$\vec{E}(0, 0, z) = \sum_i \vec{E}_i(0, 0, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4z\vec{e}_z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (9)$$

Das Feld auf der  $z$ -Achse hat also nur eine  $z$ -Komponente, wie aufgrund der Symmetrie der Ladungsanordnung zu erwarten ist. Oberhalb der  $xy$ -Ebene zeigt das Feld in positive  $z$ -Richtung (für positive  $q$ ), unterhalb in negative  $z$ -Richtung.

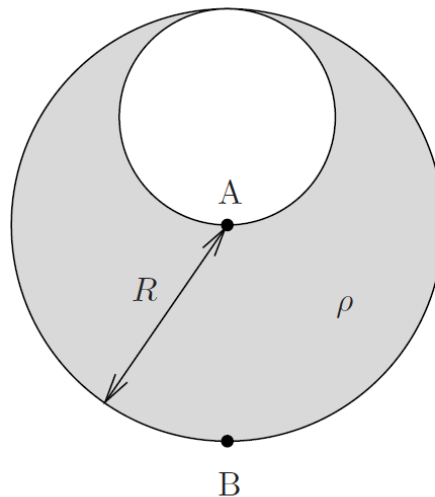
## Aufgabe 2: Kugel mit Hohlraum

Das Feld einer homogenen geladenen Kugel hat die Form:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} & , \quad r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} & , \quad r > R \end{cases} \quad (10)$$

Hierbei ist  $R$  der Radius der Kugel und  $Q$  ihre Ladung. Benutzen Sie dies, um das folgende Problem zu bearbeiten:

Eine Kugel mit Radius  $R$  war positiv geladen mit einer einheitlichen Ladungsdichte  $\rho$ . Dann wurde eine kleinere Kugel mit dem Radius  $R/2$  ausgeschnitten und entfernt (siehe Skizze). Welche Richtung und welchen Betrag hat das Feld in den Punkten A und B?



## Lösung:

Dieses Problem lässt sich mit Hilfe des Superpositionsprinzips leicht lösen. Denn die Kugel mit dem "Loch" lässt sich darstellen als Überlagerung von:

1. Kugel 1 mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Ursprung mit homogener Ladungsdichte  $\rho$  und
2. Kugel 2 mit Radius  $\frac{R}{2}$  und Mittelpunkt  $\frac{R}{2}\vec{e}_z$  mit homogener Ladungsdichte  $-\rho$ .

Dann besagt das Superpositionsprinzip, dass das Feld der kombinierten Ladungsverteilung die Summe der Felder der einzelnen Ladungsverteilungen ist:

Also im Punkt A:

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_1(A) + \vec{E}_2(A) \quad (11)$$

Dabei ist gemäß Angabe:

$$\vec{E}_1(A) = 0 \quad (12)$$

und:

$$\vec{E}_2(A) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(R/2)^3} \left( -\frac{R}{2} \vec{e}_z \right) = -\frac{Q_2}{\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_z \quad (13)$$

mit:

$$Q_2 = -\rho \frac{4\pi}{3} (R/2)^3 = -\frac{\pi}{6} \rho R^3 \quad (14)$$

also:

$$\vec{E}(A) = \frac{\rho R}{6\epsilon_0} \vec{e}_z \quad (15)$$

Entsprechend im Punkt B:

$$\vec{E}(B) = \vec{E}_1(B) + \vec{E}_2(B) \quad (16)$$

Dabei ist gemäß Angabe:

$$\vec{E}_1(B) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^3} (-R \vec{e}_z) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_z \quad (17)$$

mit:

$$Q_1 = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (18)$$

und:

$$\vec{E}_2(B) = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(R/2)^3} \left( -\frac{3R}{2} \vec{e}_z \right) = -\frac{Q_2}{9\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_z \quad (19)$$

mit:

$$Q_2 = -\frac{\pi}{6} \rho R^3 \quad (20)$$

also:

$$\vec{E}(B) = -\frac{\rho R}{3\epsilon_0} \vec{e}_z + \frac{\rho R}{54\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{17\rho R}{54\epsilon_0} \vec{e}_z \quad (21)$$

D.h. das Feld zeigt also im Punkt A nach oben und im Punkt B nach unten, in beiden Fällen also von der Ladungsverteilung weg, was klar ist, da es sich ja um eine positive Ladung handelt. Die

Feldstärke im Punkt B ist etwa doppelt so groß wie die in Punkt A, was ebenfalls anschaulich ist, da in Punkt B die gesamte abstoßende Kraft der gelocherten Kugel nach unten zeigt, während in Punkt A die nach oben gerichtete Abstoßung durch die untere Halbkugel teilweise von der nach unten gerichteten Abstoßung durch den Rest der oberen Halbkugel kompensiert wird.

### Aufgabe 3: Kontinuierliche Ladungsverteilung

1. Betrachten Sie die folgende Ladungskonfiguration und berechnen Sie das elektrostatische Feld:  
Eine konstante Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf der gesamten  $xy$ -Ebene.
2. Verwenden Sie das Ergebnis ( $\vec{E}(\vec{r}) = \text{sign}(z)\sigma\hat{e}_z/2\epsilon_0$ ) um das Feld zweier unendlicher paralleler Ebenen  $x = \pm a$  mit konstanten und gleichen Flächenladungsdichten  $\sigma$  zu bestimmen. Betrachten Sie durch die beiden Ebenen definierten Teilräume getrennt.

**Hinweis:** Sie können das Integral aus 1. vereinfachen, indem Sie sich überlegen, welche Feldkomponenten aus Symmetriegründen verschwinden müssen. Es gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = 2/a^2$

### Lösung:

1. Das Feld der mit konstanter Linienladungsdichte  $\lambda$  belegten  $z$ -Achse findet man durch Integration über die infinitesimalen Ladungselemente  $dq = \lambda dz'$  an den Orten  $\vec{r}'(z') = z'\hat{e}_z$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda \frac{\vec{r} - z'\hat{e}_z}{|\vec{r} - z'\hat{e}_z|^3} \quad (22)$$

Das Integral für die  $z$ -Komponente des Feldes lautet:

$$E_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \lambda \frac{x}{(x^2 + y^2(z - z')^2)^{3/2}} \quad (23)$$

Mit der Abkürzung  $x^2 + y^2 = a^2$  und der Substitution  $z' - z = \zeta$ ,  $dz' = d\zeta$  nimmt das Integral die übersichtlichere Form:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(a^2 + \zeta^2)^{3/2}} \quad (24)$$

an, woraus mit dem angegebenen Integral folgt:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{\lambda x}{2\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (25)$$

Entsprechend ergibt sich für die  $y$ -Komponente des Feldes:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (26)$$

Zusammengefasst lautet das Feld daher:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2 + y^2} \quad (27)$$

Es zeigt radial von der Linienladungsdichte auf der  $z$ -Achse weg (für positives  $\lambda$ ) und sein Betrag nimmt umgekehrt proportional zum Abstand von der  $z$ -Achse ab.

2. Im Bereich  $x < -a$  links von beiden Ebenen wirken die Felder beider Ebenen in dieselbe Richtung ( $-\vec{e}_x, \sigma > 0$ ), addieren sich also "konstruktiv". Das Gesamtfeld dort ist also:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (28)$$

Im Zwischenraum  $-a < x < a$  zwischen den beiden geladenen Ebenen haben die Einzelfelder zwar denselben Betrag, zeigen aber in entgegengesetzte Richtungen ( $\pm\vec{e}_x$ ), addieren sich also "destruktiv". Das Gesamtfeld dort ist also:

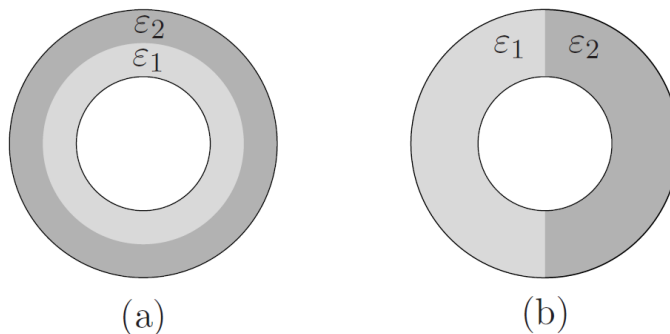
$$\vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (29)$$

Im Bereich  $x > a$  rechts von beiden Ebenen wirken die Felder beider Ebenen in dieselbe Richtung ( $\vec{e}_x, \sigma > 0$ ), addieren sich also "konstruktiv". Das Gesamtfeld dort ist also:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \quad (30)$$

## Aufgabe 4: Kugelkondensatoren

An den beiden abgebildeten Kugelkondensatoren liegt zwischen der inneren und der äußeren Metallkugel die Spannung  $U$  an. Dabei stellen die schattierten Bereiche Dielektrika dar. Berechnen sie für (a) und (b) die Kapazität und die Flächenladungsdichte auf der äußeren und der inneren Kugel. Nehmen Sie an, dass die Felder in beiden Fällen rein radial ausgerichtet sind. (Sie können davon ausgehen, dass sich die Kapazität eines Kondensators durch das Ausfüllen mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  um den Faktor  $\epsilon$  erhöht.)

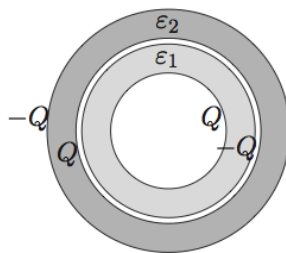


### Lösung:

Die Kapazität eines Kugelkondensators mit innerem bzw. äußerem Radius  $R_i$  bzw.  $R_a$  wird durch ein Dielektrikum im Zwischenraum um den Faktor  $\epsilon$  vergrößert, also ist:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \quad (31)$$

- Wir denken uns nun den gegebenen Kondensator als Grenzfall von zwei ineinandersteckten Kugelkondensatoren mit kleinem Luftspalt:



Auf beiden Kondensatoren befinde sich die Ladung  $Q$ , genauer: Auf der inneren Schale des inneren Kondensators  $Q$ , auf seiner äußeren  $-Q$ . Ebenso für den äußeren Kondensator. Dann herrscht in allen luftgefüllten Gebieten kein Feld.

Die Spannung zwischen den beiden Schalen des inneren Kondensators ist:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad (32)$$



mit:

$$C = 4\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_{a1}R_{i1}}{R_{a1} - R_{i1}} \quad (33)$$

und entsprechend für den äußeren Kondensator. Die Gesamtspannung zwischen innerster und äußerster Schicht der Anordnung ist also:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_{a1}R_{i1}}{R_{a1} - R_{i1}} + \frac{R_{a2}R_{i2}}{R_{a2} - R_{i2}} \right) \quad (34)$$

Lässt man nun den Luftspalt gegen 0 gehen, d.h.  $R_{a1} = R_{i2} = R_m$  und definiert  $R_{i1} = R_i, R_{a2} = R_a$ , dann erhält man hieraus für die Gesamtkapazität:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_m - R_i}{\epsilon_1 R_m R_i} + \frac{R_a - R_m}{\epsilon_2 R_a R_m} \right) \quad (35)$$

bzw.:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 R_i R_m R_a}{\epsilon_1 (R_a - R_m) R_i + \epsilon_2 (R_m - R_i) R_a} \quad (36)$$

Anmerkung: Offenbar gilt:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (37)$$

d.h. es handelt sich hier effektiv um eine Hintereinanderschaltung der beiden Kondensatorhälften.

Die Flächenladungsdichte auf der inneren Kugelschale ergibt sich zu:

$$\sigma_i = \frac{Q}{4\pi R_i^2} = \frac{CU}{4\pi^2 R_i^2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 R_m R_a / R_i}{\epsilon_1 (R_a - R_m) R_i + \epsilon_2 (R_m - R_i) R_a} \quad (38)$$

und die auf der äußeren Kugelschale entsprechend zu:

$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi R_a^2} = \frac{CU}{4\pi R_a^2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 U R_i R_m / R_a}{\epsilon_1 (R_a - R_m) R_i + \epsilon_2 (R_m - R_i) R_a} \quad (39)$$

2. In diesem Fall befinden sich die beiden Hälften einer Kugelschale auf demselben Potential, tragen aber unterschiedliche Ladungen:

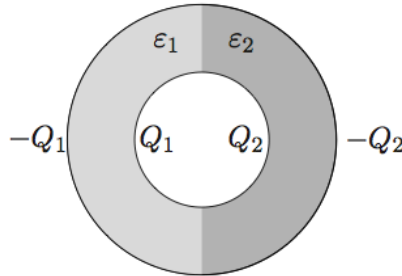
Es gilt:

$$Q_1 = C_1 U \quad , \quad Q_2 = C_2 U \quad (40)$$

mit den halben Kapazitäten, also:

$$C_1 = 2\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \quad , \quad C_2 = 2\pi\epsilon_2\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \quad (41)$$

Die Gesamtladung beträgt also:



$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} U \quad (42)$$

und die Gesamtkapazität daher:

$$C = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \quad (43)$$

Anmerkung: Offenbar gilt:

$$C = C_1 + C_2 \quad (44)$$

d.h. es handelt sich hier effektiv um eine Parallelschaltung der beiden Kondensatorhälften.

Es gibt 4 Flächenladungsdichten:

$$\sigma_{1i} = \frac{Q_1}{2\pi R_i^2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 U R_a / R_i}{R_a - R_i} \quad (45)$$

$$\sigma_{1a} = \frac{Q_1}{2\pi R_a^2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 U R_i / R_a}{R_a - R_i} \quad (46)$$

$$\sigma_{2i} = \frac{Q_2}{2\pi R_i^2} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 U R_a / R_i}{R_a - R_i} \quad (47)$$

$$\sigma_{2a} = \frac{Q_2}{2\pi R_a^2} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 U R_i / R_a}{R_a - R_i} \quad (48)$$

## Aufgabe 5: Toroid

Aus Al ( $\chi = 2 \cdot 10^{-5}$ ) wird ein Toroid mittleren Umfangs von  $l = 20\text{cm}$  hergestellt und mit  $N = 250$  Drahtwicklungen gleichmäßig umwickelt. Wenn durch den Draht ein Strom von  $I = 10\text{A}$  fließt:

1. Wie groß ist die Magnetisierung  $M$  des Aluminiums?
2. Wie hoch ist die magnetische Flußdichte im Aluminium?
3. Welcher Strom müsste fließen, damit in der leeren Spule die gleiche magnetische Induktion herrscht im wie Aluminium (wenn Strom fließt)?

## Lösung:

Definitionsgleichungen mit Ergebnissen:

$$H = \frac{NI}{l} = 12500 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (49)$$

$$M = \chi H = 0,25 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (50)$$

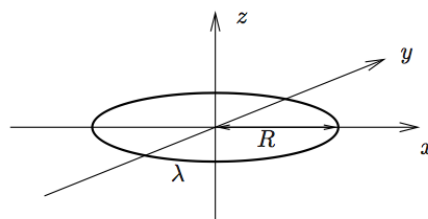
$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0 H(1 + \chi) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 12500 \cdot 1,00002 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad (51)$$

$$B = 1,57 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad (52)$$

Aus obiger Gleichung ist ersichtlich, dass der Beitrag von  $M$  zu  $B$  verschwindend klein ist. Gleiches  $B$  ohne das Al-Toroid erhält man, indem man den Strom um  $20 \cdot 10^{-6}\text{A}$  erhöht.

## Aufgabe 6: Potential einer geladenen Kreislinie

Eine homogene positive Linienladungsdichte  $\lambda$  ist in der  $xy$ -Ebene in Form einer Kreislinie mit dem Radius  $R$  angeordnet (Skizze).



1. Rechnen Sie nach, dass das Potential für beliebige Punkte auf der  $z$ -Achse durch  $\phi(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$  gegeben ist. Stellen Sie  $\phi(z)$  graphisch dar und beschreiben Sie die Kraft, die auf eine entlang der  $z$ -Achse frei bewegliche Testladung in Abhängigkeit von ihrer Position wirkt.
2. Zeigen Sie, dass  $\phi(z)$  für sehr große  $z$  so aussieht wie das Potential einer geeigneten Punktladung im Ursprung, und berechnen Sie für etwas kleinere  $z$  den ersten Korrekturterm zum Punktladungspotential.
3. Angenommen, Sie wissen, dass sei eine in der  $xy$ -Ebene befindliche homogene geladene Kreislinie mit Zentrum im Ursprung und unbekanntem  $\lambda$  und  $R$  vor sich haben und vermessen das Potential entlang der positiven  $z$ -Achse in großem Abstand vom Ursprung. Ihre Messgenauigkeit sei zunächst nicht groß genug, um den Potentialverlauf vom Verlauf eines Punktpotentials unterscheiden zu können. Können Sie die Gesamtladung und / oder den Radius der Kreislinie anhand der Messwerte bestimmen?
4. Nun seien Sie bei der Vermessung des Potentials dem Ursprung so nahe gekommen, dass Sie leichte Abweichungen vom  $\frac{1}{z}$ -Verhalten registrieren. Können Sie nun die Gesamtladung und / oder den Radius der Kreislinie bestimmen?

## Lösung:

1. Der Beitrag eines infinitesimalen Elements des geladenen Kreises zum Potential am Ort  $\vec{r}$  ist:

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (53)$$

Dabei ist  $\vec{r}' = R\cos\varphi' \vec{e}_x + R\sin\varphi' \vec{e}_y$  der Ort des Elements und  $dq = \lambda R d\varphi'$  seine Ladung. Insgesamt erzeugt die geladene Kreislinie also am Ort  $\vec{r} = z\vec{e}_z$  das Potential:

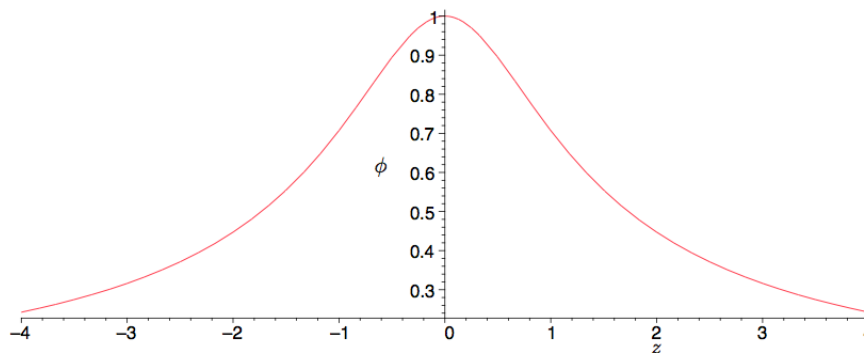
$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad (54)$$

Der Integrand hängt nun gar nicht mehr von  $\varphi'$  ab (was physikalisch klar ist: alle Ladungselemente liefern denselben Betrag zum Potential bei  $\vec{r} = z\vec{e}_z$ , da die Ladungsverteilung symmetrisch zur  $z$ -Achse ist), sodass die Integration trivial ist:

$$\phi(z) = \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad (55)$$

Bild (die Einheit auf der  $z$ -Achse ist  $R$ , auf der  $\phi$ -Achse  $\lambda R 2\epsilon_0$ ):

Die Kraft ergibt sich aus der (negativen) Ableitung des Potentials. Also wirkt im Mittelpunkt des Kreises bei  $z = 0$  keine Kraft, dort herrscht instabiles Gleichgewicht. Für positive und negative  $z$  gibt es eine symmetrische abstoßende Kraft, die bei ca.  $z = \pm R$  maximalen Betrag erreicht und für unendlichen Abstand gegen Null geht.



2. Wir ziehen einen Faktor  $z$  aus der Wurzel im Nenner des Potentials heraus und erhalten so:

$$\phi(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z} \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} \quad (56)$$

Für sehr große  $z$  - genauer: für sehr kleine  $R/z$ , d.h.  $z \gg R$  - kann man  $(R/z)^2$  gegenüber 1 vernachlässigen und erhält:

$$\phi(z) \approx \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z} \quad (57)$$

Dies ist das Potential (auf der positiven  $z$  - Achse) einer Punktladung der Größe  $Q = 2\pi R\lambda$  im Ursprung.

Um nun den ersten Korrekturterm zu berechnen, verwendet man etwas systematischer die Taylor-Entwicklung von  $\phi(z)$  in der kleinen Größe  $R/z$  ("Entwicklung um Unendlich"):

$$\phi(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z} \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \dots \right) \quad (58)$$

Also:

$$\phi(z) \approx \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z} - \frac{\lambda R^3}{4\epsilon_0 z^3} \quad (59)$$

3. Wenn man nur das für die Punktladung charakteristische  $1/z$  - Verhalten des Potentials messen kann, dann kann man durch einen Fit der Messwerte an:

$$\phi^{(0)}(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z} \quad (60)$$

das Produkt  $\lambda R$ , also die Gesamtladung  $Q = 2\pi R\lambda$  bestimmen, aber nicht die beiden Faktoren  $\lambda$  und  $R$  getrennt. In sehr großer Entfernung macht sich also nur die Gesamtladung der Verteilung bemerkbar, aber nicht ihre räumliche Anordnung.

4. Da man aus 3.  $\lambda R$  kennt, kann man von den Messwerten das Punktpotential  $\frac{\lambda R}{2\epsilon_0 z}$  ("Monopol-Anteil") subtrahieren und die verbleibende Differenz an:

$$\phi^{(1)}(z) = -\frac{\lambda R^3}{4\epsilon_0 z^3} \quad (61)$$

fiten. Das liefert zunächst  $\lambda R^3$ , durch Division mit dem bekannten  $\lambda R$  also  $R^2$  und so den gesuchten Wert  $R$ .

## Aufgabe 7: Magnetisierbarer Halbraum

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Halbraum  $z < 0$  mit einem magnetisierbaren Material der Permeabilitätszahl  $\mu_r$  gefüllt, der Halbraum  $z > 0$  ist leer. Auf der Oberfläche des magnetisierbaren Materials verläuft entlang der  $y$ -Achse ein unendlich langer gerader Draht mit vernachlässigbarem Querschnitt, durch den ein konstanter Strom der Stärke  $I$  in positive  $y$ -Richtung fließt. Bestimmen Sie  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{M}$  im Leerraum und im magnetisierbaren Material.

**Hinweis:** Nehmen Sie an, dass  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{M}$  die Form  $\vec{H}(\vec{r}) = H_a(r)\vec{e}_\varphi$  im Außenraum bzw.  $\vec{H}(\vec{r}) = H_i(r)\vec{e}_\varphi$  im Innenraum haben etc., wobei  $r$  der Abstand zum Draht und  $\varphi$  der Winkel um die  $y$ -Achse ist.

### Lösung:

Das "modifizierte Amperesche Gesetz":

$$\int_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int_A d\vec{S} \cdot \vec{j} \quad (62)$$

führt mit dem Ansatz:

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_a(r)\vec{e}_\varphi, \quad \vec{H}(\vec{r}) = H_i(r)\vec{e}_\varphi \quad (63)$$

und einem Kreis vom Radius  $r$  um den Draht als Integrationsweg auf:

$$\pi r H_a(r) + \pi r H_i(r) = I \quad (64)$$

Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen Innen- und Außenfeld. Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  muss die Normalkomponente von  $\vec{B}$  beim Übergang von Materie ins Vakuum stetig sein, also ( $r$ -Abhängigkeit im folgenden nicht ausgeschrieben):

$$B_i = B_a \quad (65)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ , nämlich:

$$H_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_i \quad (66)$$

bzw:

$$H_a = \frac{1}{\mu_0} B_a \quad (67)$$

folgt hieraus die gesuchte Verbindung zwischen  $H_a$  und  $H_i$ :

$$H_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_a = \frac{1}{\mu_r} H_a \quad (68)$$

Zusammen mit der obigen Gleichung sind das zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $H_i$  und  $H_a$  mit der Lösung:

$$H_a(r) = \frac{\mu_r}{1 + \mu_r} \frac{I}{\pi r}, \quad H_i(r) = \frac{1}{1 + \mu_r} \frac{I}{\pi r} \quad (69)$$

Daraus nun  $B_a$  und  $B_i$ :

$$B_a(r) = \frac{\mu_r}{1 + \mu_r} \frac{\mu_0 I}{\pi r} = B_i(r) \quad (70)$$

Zum Schluss ergibt sich die Magnetisierung  $\vec{M}$  aus der Definition  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (71)$$

zu:

$$M_a(r) = 0 \quad (72)$$

(klar) und:

$$M_i(r) = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{I}{\pi r} \quad (73)$$

Zusammengefasst:

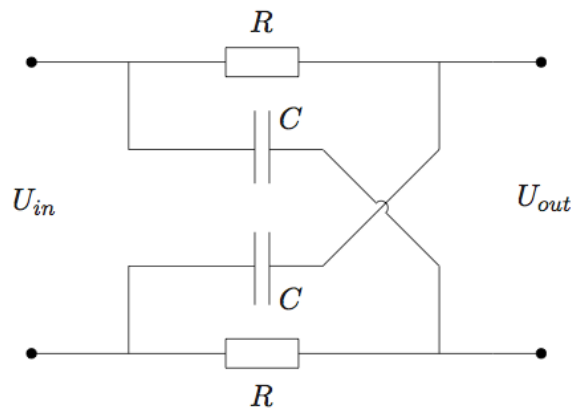
$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \mu_r} \frac{I}{\pi r} \vec{e}_\varphi & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ \frac{\mu_r}{1 + \mu_r} \frac{I}{\pi r} \vec{e}_\varphi & \text{für } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (74)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_r}{1 + \mu_r} \frac{\mu_0 I}{\pi r} \vec{e}_\varphi \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (75)$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{I}{\pi r} \vec{e}_\varphi & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (76)$$

## Aufgabe 8: Allpass-Filter

In der folgenden Abbildung ist ein sog. Allpass-Filter dargestellt:



- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $H(\omega) = \frac{\hat{U}_{out}}{\hat{U}_{in}}$ .  
**Hinweis:** Durch genaues Hinsehen erkennt man, dass die Schaltung auch in einer etwas einfacheren Form gezeichnet werden kann. Verwenden Sie den komplexen Ansatz  $U_{in}(t) = \hat{U}_{in}e^{i\omega t}$  und rechnen Sie mit komplexen Widerständen, um die komplexen Amplituden  $\hat{I}_1$  und  $\hat{I}_2$  der Strome  $I_1(t) = \hat{I}_1e^{i\omega t}$  und  $I_2(t) = \hat{I}_2e^{i\omega t}$  und daraus  $\hat{U}_{out}$  zu bestimmen. Das Endergebnis lautet:  $H(\omega) = \frac{1-i\omega RC}{1+i\omega RC}$ .
- Wie groß sind der Verstärkungsfaktor und die Phasenverschiebung als Funktionen von  $\omega$ ? Warum heißt die Schaltung "Allpass-Filter"?

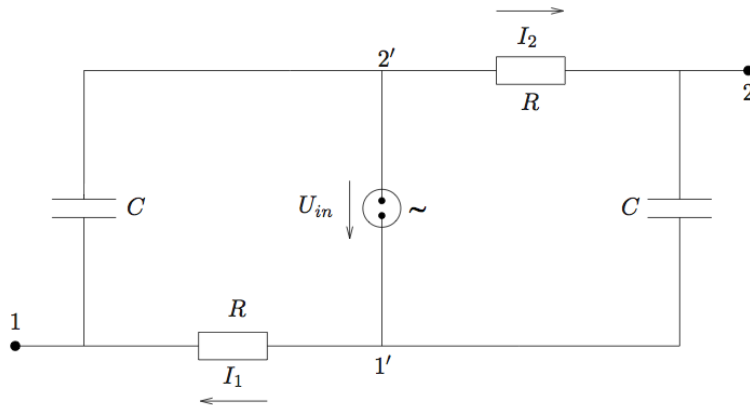
## Lösung:

- Durch genaues Hinsehen erkennt man, dass sich der Allpass-Filter auch in der folgenden Form darstellen lässt:

Es handelt sich um zwei identische ungekoppelte  $RC$  - Schaltkreise, die an die gemeinsame Wechselspannungsquelle  $U_{in}(t)$  angeschlossen sind, wobei die Ausgangsspannung  $U_{out}(t)$  zwischen den markierten Punkten 1 und 2 abgegriffen wird. Außerdem sind die positiven Richtungskonventionen  $I_1$  und  $I_2$  eingezeichnet, ebenso die positive Richtung für die Eingangsspannung.  $U_{in}(t)$  soll also positives Vorzeichen haben, wenn sie an der Pfeilspitze positives und am Pfeilende negatives Potential erzeugt. D.h. der Pfeil gibt die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger durch die Spannungsquelle an. (Beliebige andere Konventionen sind möglich, müssen aber konsistent durchgehalten werden.) Dann ergibt sich die komplexe Amplitude  $\hat{I}_1$  aus der komplexen Amplitude  $\hat{U}_{in}$  per:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_{in} \quad (77)$$





denn bei der Reihenschaltung von  $R$  und  $C$  addieren sich deren komplexe Widerstände. Vorzeichenmäßig ist das korrekt, wie man aus dem Spezialfall ohne Kondensator (also  $C = \infty$ ) erkennt. Für  $\hat{I}_2$  gilt entsprechend:

$$\hat{I}_2 = -\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_{in} \quad (78)$$

Das negative Vorzeichen ist korrekt, wie man wieder sieht, wenn man den Spezialfall ohne Kondensator betrachtet.

Wegen:

$$U_{out} = \phi_1 - \phi_2 = \underbrace{\phi_1 - \phi'_1}_{-RI_1} + \underbrace{\phi'_1 - \phi'_2}_{U_{in}} + \underbrace{\phi'_2 - \phi_2}_{RI_2} = U_{in} - RI_1 + RI_2 \quad (79)$$

ist die gesuchte komplexe Amplitude  $\hat{U}_{out}$  der Ausgangsspannung also:

$$\hat{U}_{out} = \hat{U}_{in} - R\hat{I}_1 + R\hat{I}_2 \quad (80)$$

Setzt man hier nun die oben bestimmten  $\hat{I}_1$  und  $\hat{I}_2$  ein, dann folgt:

$$\hat{U}_{out} = \hat{U}_{in} - R \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_{in} + R \left( -\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_{in} \right) = \left( 1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \right) \hat{U}_{in} \quad (81)$$

Hieraus kann man die Übertragungsfunktion ablesen:

$$H(\omega) = 1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad (82)$$

die sich allerdings noch in eine deutlich schickere Form bringen lässt:

$$1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = 1 - \frac{2i\omega RC}{i\omega RC + 1} = \frac{1 + i\omega RC - 2i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} \quad (83)$$

Also im Ganzen:

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} \quad (84)$$

2. Der Verstärkungsfaktor ist das Verhältnis der reellen Amplituden von Ausgangs- und Eingangsspannung:

$$V = \frac{|\hat{U}_{out}|}{|\hat{U}_{in}|} \quad (85)$$

also einfach der Betrag der Übertragungsfunktion  $V = |H(\omega)|$ . Im betrachteten Fall ist:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} \right| = \frac{|1 - i\omega RC|}{|1 + i\omega RC|} = \frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = 1 \quad (86)$$

Die Phasenverschiebung zwischen  $U_{in}(t)$  und  $U_{out}(t)$  ist entsprechend die komplexe Phase der Übertragungsfunktion. Die berechnet man am einfachsten, indem man die Darstellung  $1 + i\omega RC = re^{i\varphi}$  benutzt:

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi} \quad (87)$$

$H(\omega)$  ist also ein reiner Phasenfaktor (klar, denn  $|H(\omega)| = 1$ ). Für den Phasenwinkel  $\varphi$  gilt aufgrund seiner Definition:

$$re^{i\varphi} = 1 + i\omega RC \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan(\omega RC) \quad (88)$$

Also ist die gesuchte Phasenverschiebung zwischen  $U_{in}(t)$  und  $U_{out}(t)$ :

$$\Delta\varphi = -2\varphi = -2\arctan(\omega RC) \quad (89)$$

Der Allpass-Filter erzeugt also ein Ausgangssignal, dessen (reelle) Amplitude für alle Frequenzen mit der (reellen) Amplitude des Eingangssignals übereinstimmt, das aber eine frequenzabhängige Phasenverschiebung aufweist. Daher der Name "Allpass-Filter".

## Aufgabe 9: Lorentz-Transformation

Zwei Raumschiffe  $R_1$  und  $R_2$  starten zur Erdzeit  $t = 0$  für eine Forschungsmission in Richtung des Sternbildes Cygnus (Schwan). Mit der Erdstation sei das System  $S(t, x)$ , mit dem Raumschiff  $R_1$  das System  $S'(t', x')$  und mit dem Raumschiff  $R_2$  das System  $S''(t'', x'')$  fest verbunden. Bezogen auf die Erdstation hat das Raumschiff  $R_1$  die Geschwindigkeit  $0,6c$  und das Raumschiff  $R_2$  die Geschwindigkeit  $0,8c$ . Die Borduhren sowie die Missionsuhr auf der Erdstation wurden beim Start synchronisiert und die Systeme  $S, S'$  und  $S''$  seien gleich orientiert.

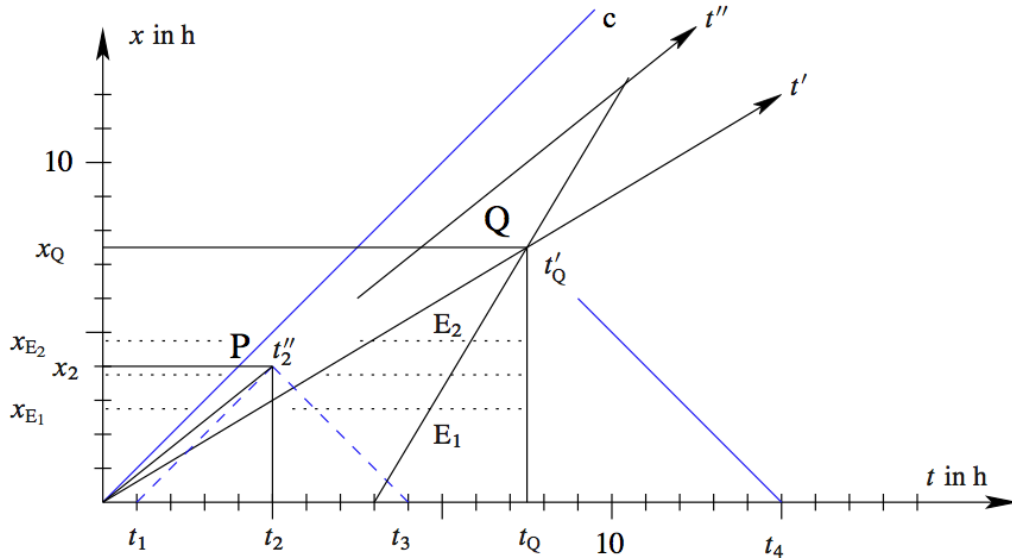
- Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für das  $S$ -System und tragen Sie die Weltlinien der Raumschiffe  $R_1$  und  $R_2$  ein. Für das Diagramm, DinA4 - Querformat,  
 $t$ -Achse:  $1\text{cm} \hat{=} 1\text{h}$ ,  $0 < t < 15\text{h}$ ,  
 $x$ -Achse:  $1\text{m} \hat{=} 1\text{Lichtstunde (Lh)}$ ,  $0 \leq x \leq 12\text{Lh}$ .  
Das Diagramm wird im Laufe der Aufgabe weiter vervollständigt.

2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Raumschiffes  $R_2$  im System des Raumschiffes  $R_1$ .
3. Zum Zeitpunkt  $t_1 = 1h$  wird zur Kontrolle an die Raumschiffe ein Lichtspruch gesandt. Der Lichtspruch wird vom Raumschiff  $R_2$  zum Zeitpunkt  $t'_2$  (Ereignis P) sofort beantwortet und zur Erdstation zurückgesandt und trifft dort zum Zeitpunkt  $t_3$ .  
Tragen Sie das Ereignis P in das Minkowski-Diagramm auf Teilaufgabe 1. ein. Berechnen Sie sodann die Zeit  $t_3$ .  
[Teilergebnis:  $t_3 = \frac{c+v_2}{c-v_2} t_1$ ]
4. Nach  $t'_p = 10$  Stunden Flugzeit registriert das Raumschiff  $R_1$  (Ereignis Q) gleichzeitig zwei Sternexplosionen  $E_1(t'_Q, x_{E_1})$  und  $E_2(t'_Q, x_{E_2})$ . Der räumliche Abstand  $|x_{E_2} - x_{E_1}|$  der beiden Explosionen wird zu  $\frac{8}{5}$  Lichtstunden bestimmt. Die Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  liegen symmetrisch zur halben bis  $t'_Q$  von  $R_1$  zurückgelegten Flugstrecke. Das Raumschiff meldet das Ereignis Q sofort per Lichtspruch an das Raumschiff  $R_2$  und die Erdstation. Auf der Erde trifft die Nachricht zum Zeitpunkt  $t_4$  und auf  $R_2$  zum Zeitpunkt  $t''_4$  ein.  
Tragen Sie das Ereignis Q in das Minkowski-Diagramm aus Teilaufgabe 1. ein. Berechnen Sie sodann die Zeitpunkte  $t_4$  und  $t''_4$ . Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben 1 und 3.
5. Berechnen Sie die räumlichen Koordinaten  $x_{E_1}$  und  $x_{E_2}$  der Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  im System S. Tragen Sie sodann die Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  in das Diagramm aus Teilaufgabe 1. ein. Erläutern Sie kurz, welche Bedeutung die Linie hat, auf welcher die Ereignisse Q,  $E_1$  und  $E_2$  liegen.
6. Zeigen Sie anhand Ihrer bisherigen Ergebnisse, dass für das Raumschiff  $R_1$  die Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  zwar gleichzeitig stattfinden, die Erdstation aber die beiden Ereignisse im Abstand von 2 Stunden registriert.

## Lösung:

1. Raumschiff  $R_1$ :  $v_1 = 0,6c = \frac{3}{5}c$ , Raumschiff  $R_2$ :  $v_2 = 0,8c = \frac{4}{5}c$  d.h:

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 &= \frac{3}{5} \\ \beta_2 &= \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 &= \frac{5}{4} \\ \gamma_2 &= \frac{5}{3} \end{cases} \quad (90)$$



2.  $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$  ist die Geschwindigkeit des Raumschiffs  $R_2$  im Erdsystem. Lorentz-Transformation ins System  $S'$ :

$$\left. \begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x'}{ct'} = \frac{x - \beta ct}{ct - \beta x} = \frac{\frac{x}{t} - \beta c}{c - \beta x} \quad (91)$$

somit:

$$v'_2 = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (92)$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$v'_2 = \frac{0,8 - 0,6}{1 - 0,8 \cdot 0,6} c = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}} c = \frac{5}{13} c \quad (93)$$

Das Raumschiff  $R_2$  hat im System des Raumschiffs  $R_1$  die Geschwindigkeit  $v'_2 = \frac{5}{13} c$ .

3. Dem Minkowski-Diagramm entnimmt man einen linearen Zusammenhang zwischen  $t$  und  $t'$ :

$$\left. \begin{aligned} t'_2 &= k \cdot t_1 \\ t_3 &= k \cdot t'_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_3 = k \cdot kt_1 = k^2 t_1 \quad (94)$$

Es gilt mit  $x_2 = c(t_2 - t_1)$  und  $t_2 = \frac{1}{2}(t_3 + t_1)$ :

$$x_2 = c \left( \frac{t_3}{2} + \frac{t_1}{2} - t_1 \right) = \frac{c}{2} (t_3 - t_1) \quad (95)$$

und:

$$v_2 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{\frac{c}{2}(t_3 - t_1)}{\frac{1}{2}(t_3 + t_1)} = c \frac{t_3 - t_1}{t_3 + t_1} \quad (96)$$

Einsetzen von  $t_3 = k^2 t_1$  ergibt:

$$v_2 = c \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \Rightarrow k^2 v_2 + v_2 = ck^2 - c \Rightarrow k^2(c - v_2) = c + v_2 \quad (97)$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{c + v_2}{c - v_2} \quad (98)$$

mit  $v_2 = \frac{4}{5}$  und  $t_1 = 1h$  folgt:

$$t_3 = k^2 t_1 = \frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} t_1 = 9t_1 \Rightarrow t_3 = 9h \quad (99)$$

4. Zum Zeitpunkt  $t'_p = 10h$  wird ein Lichtsignal nach  $R_2$  und zur Erde geschickt. Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 3:

$$k_1^2 = \frac{v_1 + c}{c - v_1} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 4 \quad (100)$$

somit:

$$t_4 = k_1 \cdot t'_p = 2 \cdot 10h \Rightarrow t_4 = 20h \quad (101)$$

Das System  $S''$  bewegt sich nach Teilaufgabe 2. mit der Geschwindigkeit  $v'_2 = \frac{5}{13}c$  gegen  $S'$ , damit:

$$k'_2 = \sqrt{\frac{c + v'_2}{c - v'_2}} \Rightarrow k'_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{1 - \frac{5}{13}}} = \frac{3}{2} \quad (102)$$

somit:

$$t''_4 = k'_2 \cdot t'_p \Rightarrow t''_4 = \frac{3}{2} \cdot 10h \Rightarrow t''_4 = 15h \quad (103)$$

5. Halbe Flugstrecke:

$$x_Q = v_1 \cdot t_Q = v_1 \cdot \gamma t'_Q = \frac{3}{5} c \frac{5}{4} \cdot 10h = \frac{15h}{2} c \Rightarrow x_Q = \frac{15}{2} Lh \quad (104)$$

$$x_s = \frac{x_Q}{2} = \frac{v_1 \gamma t'_Q}{2} \Rightarrow x_s = \frac{15}{4} Lh \quad (105)$$

Die Ereignisse liegen symmetrisch zu  $x_2$ s. Der Abstand  $|x'_{E_2} - x'_{E_1}|$  wird in  $S'$  gemessen, Abstand  $|x_{E_2} - x_{E_1}|$  in  $S$  durch Längenkontraktion. Herleitung der Längenkontraktion aus Lorentz-Transformation:

Die Ereignisse finden in  $S'$  gleichzeitig statt, d.h.  $t'_{E_1} \equiv t'_{E_2}$ :

$$0 = \gamma_1 [c(t_{E_2} - t_{E_1}) - \beta_1(x_{E_2} - x_{E_1})] \Rightarrow c(t_{E_2} - t_{E_1}) = \beta_1(x_{E_2} - x_{E_1}) \quad (106)$$

und:

$$\begin{aligned} (x'_{E_2} - x'_{E_1}) &= \gamma_1 [(x_{E_2} - x_{E_1}) - \beta_1 c(t_{E_2} - t_{E_1})] = \gamma_1 (x_{E_2} - x_{E_1})(1 - \beta_1^2) \\ &= \frac{x_{E_2} - x_{E_1}}{\gamma_1} \end{aligned} \quad (107)$$

damit:

$$|x_{E_2} - x_{E_1}| = \gamma_1 |x'_{E_2} - x'_{E_1}| = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} Lh = 2Lh \quad (108)$$

Die Ereignisse haben damit die Koordinaten:

$$x_{E_i} = x_s \pm \frac{|x_{E_2} - x_{E_1}|}{2} = \left( \frac{15}{4} \pm 1 \right) Lh \Rightarrow \begin{matrix} x_{E_1} = \frac{11}{4} Lh \\ x_{E_2} = \frac{19}{4} Lh \end{matrix} \quad (109)$$

Gerade durch die Punkte  $E_1, E_2$  und  $Q$ : Gleichzeitigkeitslinie im System  $S'$ .

6. Ein Beobachter in der Erdstation misst einen zeitlichen Abstand von 1 Lh zwischen den beiden Explosionen.