Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommer 2014

Übung 1 - Lösung

1 Kupfermünze

Die alte, von 1793 bis 1837 geprägte Pennymünze in den USA bestand aus reinem Kupfer und hatte eine Masse von 3,10 g. (Moderne „ Kupfermünzen “ werden aus einer Kupfer-Zink-Legierung geprägt, so der heutige US-Penny, oder bestehen aus einem Stahlkern mit Kupferummantelung wie der Eurocent.) Wie groß ist die Gesamtladung aller Elektronen in einer solchen Münze?
Hinweis: Die Kernladungszahl von Kupfer ist Z = 29.

Lösung:

$$q = n_e \cdot (-e) \tag{1}$$

$$n_e = Z \cdot n_{Cu} \tag{2}$$

$$n_{Cu} = (3,10g) \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \frac{Atome}{Mol}}{63,5 \frac{g}{Mol}} = 2,94 \cdot 10^{22} Atome \tag{3}$$

$$n_e = Z \cdot n_{Cu} = (29 \frac{Elektronen}{Atom}) \cdot (2,94 \cdot 10^{24} Atome) = 8,53 \cdot 10^{23} Elektronen \tag{4}$$

$$q = n_e \cdot (-e) = (8,53 \cdot 10^{23} Elektronen) \cdot (-1,60 \cdot 10^{-19} \frac{C}{Elektron}) = -1,37 \cdot 10^5 C \tag{5}$$

2 Resultierende Kraft in zwei Dimensionen

Die Ladung $q_1 = +25nC$ befindet sich im Ursprung, die Ladung $q_2 = -15nC$ liegt auf der x-Achse im Punkt $x_2 = 2m$ und die Ladung $q_0 = +20nC$ befindet sich im Punkt $x = 2m, y = 2m$. Bestimmen Sie Größe und Richtung der resultierenden Kraft auf q_0.

Lösung:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{6}$$

$$F_x = \sum_{i=1}^{2} F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x} \tag{7}$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{2} F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y} \tag{8}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_1 \cdot q_0|}{r_1^2} = (8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}) \cdot \frac{(25 \cdot 10^{-9}C) \cdot (20 \cdot 10^{-9}C)}{(2,0 \cdot \sqrt{2}\, m)^2} \\ = 5,62 \cdot 10^{-7} N \tag{9}$$

$$F_{1,x} = F_{1,y} = |\vec{F}_1| \cdot cos(45°) = (5,62 \cdot 10^{-7}N) \cdot cos(45°) = 3,97 \cdot 10^{-7}N \tag{10}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_2 \cdot q_0|}{r_2^2} \cdot \hat{r}_2 = (8,99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}) \cdot \frac{(-15 \cdot 10^{-9}C) \cdot (20 \cdot 10^{-9}C)}{(2,0m)^2} \cdot \hat{y} \\ = (-6,74 \cdot 10^{-7}\hat{y})\, N \tag{11}$$

$$F_x = \sum_{i=1}^{2} F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x} = (3,97 \cdot 10^{-7}N) + 0 = 3,97 \cdot 10^{-7}N \tag{12}$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{2} F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y} = (3,97 \cdot 10^{-7}N) + (-6,74 \cdot 10^{-7}N) = -2,77 \cdot 10^{-7}N \tag{13}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3,97 \cdot 10^{-7}N)^2 + (-2,77 \cdot 10^{-7}N)^2} \\ = 4,84 \cdot 10^{-7}N = 4,8 \cdot 10^{-7}N \tag{14}$$

$$tan\vartheta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2,77}{3,97} = -0,698 \tag{15}$$

$$\vartheta = tan^{-1}(-0,698) = -34,9° = -35° \tag{16}$$

3 Fünf Punktladungen

Fünf gleiche Punktladungen q sind gleichmäßig auf einem Halbkreis mit dem Radius e verteilt. Geben Sie mithilfe von $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ und q sowie r die Kraft auf die Ladung q_0 an, die von den anderen fünf Ladungen gleich weit entfernt ist.

Lösung:

Aus Symmetriegründen ist die y-Komponente der resultierenden Kraft auf die Ladung q_0 null. Wir müssen also nur die Kraft zwischen der Ladung q_0 und der Ladung q auf der Verlängerung der x-Achse sowie die x-Komponenten der Kräfte zwischen der Ladung q_0 und den beiden Ladungen q bei 45° betrachten. Damit gilt für die resultierende Kraft:

$$\vec{F}_{q_0} = \vec{F}_{q_{Achse},q_0} + 2 \cdot \vec{F}_{q_{(45°)},q_0} \tag{17}$$

Für die Kraft längs der Achse gilt:

$$\vec{F}_{q_{Achse},q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \hat{x} \tag{18}$$

und für die schräg verlaufenden Kräfte gilt:

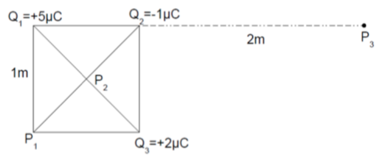
$$\begin{aligned} 2 \cdot \vec{F}_{q_{(45°)},q_0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q_0 \cdot q}{r^2} \cdot cos(45°) \cdot \hat{x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \hat{x} \end{aligned} \tag{19}$$

Die Gesamtkraft auf die Ladung q_0 ergibt sich gemäß der ersten Gleichung aus der Summe, und wir erhalten:

$$\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \hat{x} \tag{20}$$

4 Ladungen im Quadrat

Die Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 befinden sich an drei Ecken eines Quadras mit 1m Seitenlänge. Der Abstand zwischen Q_2 und P_3 beträgt 2m.
Beachten Sie: $V(\infty) = 0$.



1. Berechnen Sie das elektrostatische Potential V bei P_1, P_2 und P_3.
2. GIbt es außer in unendlicher Entfernung Punkte oder Oberflächen im Raum, wo das elektrostatische Potential Null ist?
3. Es gibt zwei Punkte, bei denen das elektrische Feld Null ist. Können Sie abschätzen, wo sich diese Punkte befinden? Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie die Feldlinien.
4. Berechnen Sie die elektrostatische Energie des Systems.

Lösung:

1. Das elektrostatische Potential an einem Ort $\vec{r}$ wird durch die drei Ladungen bestimmt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} + \frac{Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|} + \frac{Q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}|}\right) \tag{21}$$

Hier sind $\vec{r}, \vec{r}_1$, etc. Ortsvektoren. Bei P_1 beträgt das elektrostatische Potential dann:

$$\begin{aligned}\Phi_{P_1}(\vec{r}) &= \frac{10^{-6}C}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{5}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_{P_1}|} - \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_{P_1}|} + \frac{2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_{P_1}|}\right) \\ &= \frac{10^{-6}C}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{5}{1m} - \frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{2}{1m}\right) = 5,7 \cdot 10^{-4}V\end{aligned} \tag{22}$$

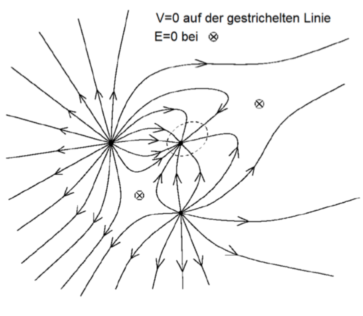
Bei P_2:

$$\Phi_{P_2}(\vec{r}) = \frac{10^{-6}C}{4\pi\epsilon_0}(5 - 1 + 2)\sqrt{2}m^{-1} = 7,6 \cdot 10^{-4}V \tag{23}$$

Bei P_3:

$$\Phi_{P_3}(\vec{r}) = \frac{10^{-6}C}{4\pi\epsilon_0}(\frac{5}{3m} - \frac{1}{2m} + \frac{2}{\sqrt{5}m}) = 1,86 \cdot 10^{-4}V \tag{24}$$

2. Unser Ausdruck für das elektrostatische Potential Φ ist die Summe aus zwei positiven und einem negativen Term. man kann also sehen, dass, wenn wir nah genug an Q_2 herankommen, der negative Term die beiden positiven Ausdrücke ausgleichen kann. Daher gibt es um Q_2 eine „ Ei-förmige “ Fläche, wo das Potential null ist.



3. Wie man in der Skizze sehen kann, gibt es zwei Punkte, wo das elektrische Feld null ist. Einer ist mehr oder weniger zwischen den beiden positiven Ladungen zu finden. Dort löschen sich die beiden Felder der Ladungen aus. Allerdings muss man auch noch die negative Ladung in Betracht ziehen, die diesen Punkt verschiebt.
Der andere Punkt befindet sich oben recht der negativen Ladung. Hier wird die Abstoßung der beiden positiven Ladungen gerade durch die Anziehung der negativen Ladung ausgeglichen (auf eine positive Testladung).

4. Die elektrostatische Energie des Systems ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{Q_2 \cdot Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{Q_3 \cdot Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|}\right) \\ &= \frac{10^{-12}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{5}{1} - \frac{2}{1} + \frac{10}{\sqrt{2}}\right) = 6,4 \cdot 10^{-4} J \end{aligned} \tag{25}$$

5 Nervenzelle

Die Membran des Axons einer Nervenzelle kann als dünner Hohlzylinder mit dem Radius $1,00 \cdot 10^{-5}$ m, der Länge 10,0 cm und der Dicke 10,0 nm modelliert werden. Auf der einen Seite der Membran sitzt eine positive Ladung und auf der anderen eine negative. Die Membran wirkt im Grunde wie ein Plattenkondensator mit dem Flächeninhalt $2\pi rl$ und dem Plattenabstand d. Nehmen Sie an, dass die Membran mit einem Material mit einer Dielektrizitätskonstante von 3,00 gefüllt ist.

1. Wie groß ist die Kapazität der Membran?
2. Ermitteln Sie
   (a) die Ladung auf der positiv geladenen Seite der Membran sowie
   (b) die elektrische Feldstärke der Membran, wenn über ihr eine Spannung von 70,0 mV herrscht.

Lösung:

1. Weil $d \ll r$ ist, können wir die Membran als einen Plattenkondensator mit der Kapazität $C = \frac{\varepsilon_{rel}\varepsilon_0 A}{d}$ auffassen. Wir setzen den Flächeninhalt $A = 2\pi rl$ der Membran ein und erhalten.

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\varepsilon_{rel}\varepsilon_0 rl}{d} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{rel} rl}{2d} \\ &= \frac{(3,00)(1,00 \cdot 10^{-5} m)(0,100 m)}{(8,988 \cdot 10^9 Nm^2C^{-2})2(10,0 nm)} = 16,69 nF = 16,7 nF \end{aligned} \tag{26}$$

   (a) Mit der Definition der Kapazität ergibt sich für die Ladung:

$$q = CU = (16,69 nF)(70,0 mV) = 1,17 nC \tag{27}$$

   (b) Das elektrische Feld über der Membran ergibt sich aus deren Dicke und der über ihr anliegenden Spannung:

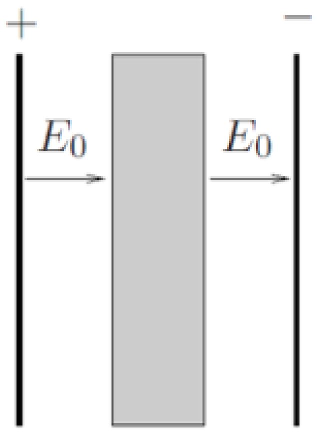
$$E = \frac{U}{d} = \frac{70,0 mV}{10 \cdot 10^{-9} m} = 7,0 MV \cdot m^{-1} \tag{28}$$

6 Dielektrikum

Über einen weiten Feldstärkebereich hängt die Polarisation $\vec{P}$ in einem Dielektrikum linear mit der Feldstärke zusammen:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{29}$$

Betrachten Sie einen Plattenkondensator in dem sich ein Dielektrikum mit der Dielektritätszahl $\varepsilon = 1+\chi$ befindet. Die Feldstärke im leeren Raum zwischen dem Dielektrikum und den Kondensatorplatten ist $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ (siehe Abbildung). Gefragt ist nach der Polarisation im Dielektrikum. Randeffekte können vernachlässigt werden.



1. Warum können Sie die Polarisation nicht einfach mit Hilfe der obigen Gleichung aus dem gegebenen $\vec{E}_0$ ausrechnen?
2. Wie müssen Sie vorgehen um die Polarisation korrekt zu berechnen?

   Hinweis: Beachten Sie dass eine Unstetigkeitsfläche der Polarisation wie eine Flächenladung der Größe $|\sigma| = |\Delta P|$ wirkt.
3. Angenommen, Sie haben vergessen, wie man zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten löst. Wie können Sie trotzdem die Polarisation im Dielektrikum bestimmen, indem Sie sich einen genäherten Wert $\vec{P}_0$ als Ausgangspunkt überlegen und diesen schrittweise verbessern? Vergleichen Sie das so erhaltene Ergebnis mit dem in 2. berechneten Wert. Nehmen Sie an, dass $\chi < 1$ ist.

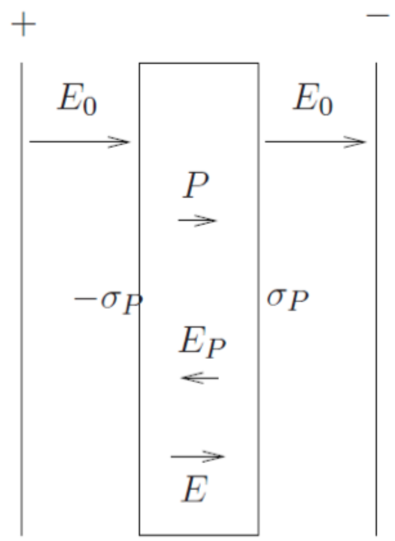
Lösung:

1. Die Gleichung:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{30}$$

gilt zwischen der Polarisation und der Gesamtfeldstärke im Dielektrikum. Diese unterscheidet sich von der außen angelegten Feldstärke $\vec{E}_0$ durch das überlagerte Gegengeld, das durch die Polarisationsladungen erzeugt wird.

2. In der folgenden Abbildung ist von oben nach unten die *"Kausalität" dargestellt. Die Ladungen auf den Kondensatorplatten erzeugen das Kondensatorfeld E_0. Dieses verursacht (zusammen mit dem noch unbekannten Gegenfeld!) eine Polarisation P im Dielektrikum. An der Oberfläche des Dielektrikums macht P einen Sprung, was zu einer Flächenladungsdichte σ_P führt. Diese erzeugt das Gegenfeld E_P, das sich mit dem äußeren Feld E_0 zum "Gleichgewichtsfeld" E überlagert.



In der Abbildung zeigt die x-Achse nach rechts. Alle vektoriellen Größen werden durch ihre x-Komponente bezeichnet, σ_P bedeutet die Flächenladungsdichte auf der rechten Oberfläche des Dielektrikums. Alle folgenden Gleichungen sind in diesem Sinne vorzeichenrichtig.
Das Gegenfeld der Polarisationsladungen wird durch die Flächenladungen auf der Oberfläche des Dielektrikums erzeugt. Die zugehörige Flächenladungsdichte ist gegeben durch:

$$\sigma_P = P \tag{31}$$

und erzeugt das Gegenfeld der Stärke:

$$E_P = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \tag{32}$$

das sich mit dem von außen angelegten Feld E_0 des Kondensators zum Gesamtfeld überlagert:

$$E = E_0 + E_P \tag{33}$$

Die letzten drei Gleichungen zusammengenommen:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \tag{34}$$

Wir könnten also einerseits die gesuchte Polarisation per:

$$P = \varepsilon_0 \chi E \tag{35}$$

ausrechnen, wenn das Gesamtfeld E schon bekannt wäre. Andererseits könnten wir das Gesamtfeld per:

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \tag{36}$$

berechnen, wen die Polarisation schon bekannt wäre. Dies ist natürlich kein logscher Zirkel, sondern einfach ein System von zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte, mit dem von außen angelegten Kondensatorfeld E_0 als Inhomogenität:

$$\begin{vmatrix} P - \varepsilon_0 \chi E = 0 \\ P + \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E_0 \end{vmatrix} \tag{37}$$

Die Lösung lautet:

$$E = \frac{1}{1+\chi} E_0 \quad , \quad P = \frac{\varepsilon_0 \chi}{1+\chi} E_0 \tag{38}$$

3. Als eine nullte Näherung für die gesuchte Polarisation kann man bei kleinem χ die stenggenommen falsche Gleichung aus Teil 1. verwenden. Denn das Gegenfeld wird bei kleinem χ nur schwach sein und daher wird:

$$P_0 = \varepsilon_0 \chi E_0 \tag{39}$$

nur ein wenig falsch sein. Um eine erste Korrektur zu dieser nullten Näherung zu berechnen, kann man mit diesem P_0 nun das Gesamtfeld in erster Näherung bestimmen:

$$E_1 = E_0 - \frac{P_0}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E_0 = (1-\chi) E_0 \tag{40}$$

und daraus einen verbesserten Wert für P erhalten:

$$P_1 = \varepsilon_0 \chi E_1 = \varepsilon_0 \chi (1-\chi) E_0 = \varepsilon_0 (\chi - \chi^2) E_0 \tag{41}$$

Dieses Ergebnis kann man nun wiederum in einem zweiten Iterationsschritt benutzen, um E und P in zweiter Ordnung zu berechnen:

$$E_2 = E_0 - \frac{P_1}{\varepsilon_0} = E_0(\chi - \chi^2)E_0 = (1 - \chi + \chi^2)E_0 \tag{42}$$

$$P_2 = \varepsilon_0\chi E_2 = \varepsilon_0\chi(1 - \chi + \chi^2)E_0 = \varepsilon_0(\chi - \chi^2 + \chi^3)E_0 \tag{43}$$

Dies kann man beliebig oft fortsetzen gemäß:

$$E_{n+1} = E_0 - \frac{P_n}{\varepsilon_0} \tag{44}$$

$$P_{n+1} = \varepsilon_0\chi E_{n+1} \tag{45}$$

Man sieht, dass man auf diese Weise genau die Taylor-Entwicklung des exakten Resultats nach χ erhält:

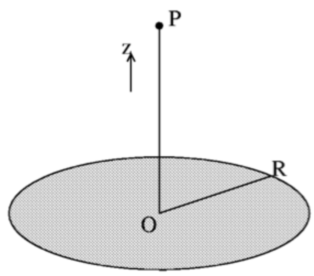
$$E = \frac{1}{1+\chi}E_0 = (1 - \chi + \chi^2 - \chi^3 + ...)E_0 \tag{46}$$

$$P = \frac{\varepsilon_0\chi}{1+\chi}E_0 = \varepsilon_0(\chi - \chi^2 + \chi^3 - \chi^4 + ...)E_0 \tag{47}$$

Diese "Störungsreihe" für E bzw. P konvergiert allerdings nur für $\chi < 1$, während das exakte Ergbnise für alle χ korrekt ist.

7 Scheibe

Eine Scheibe mit Radius R hat eine Flächenladungsdichte σ (siehe Abbildung). Die z - Achse schneidet den Mittelpunkt O. Die Gesamtladung der Schiebe beträgt $Q = \pi R^2\sigma$.



1. Berechnen Sie die Größe und Richtung des elektrischen Feldes $\vec{E}(z)$ an einem Punkt P in einer Entfernung z über dem Mittelpunkt der Scheibe. Drücken Sie das Ergebnis für $\vec{E}(z)$ in Abhängigkeit von Q, R, ε_0 und z aus.
   Hinweis: Das Ergebnis für das elektrische Feld entlang der z - Achse eines Ringes mit Radius r und Ladung q mag hier hilfreich sein:

$$\vec{E}_{Ring} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}\vec{e}_z \tag{48}$$

2. Skizzieren Sie $\vec{E}(z)$ als Funktion von z für den positiven Bereich von z. Benutzen Sie R als Einheit für die Abszisse und $\frac{Q}{(4\pi\varepsilon R^2)}$ als Einheit für $\vec{E}(z)$.

3. Benutzen Sie eine Taylor - Reihe für $\sqrt{z^2+R^2}$ um vereinfachte Ausdrücke für zwei Grenzfälle von $\vec{E}(z)$ zu finden:

   (a) $z^2 << R^2$

   (b) $z^2 >> R^2$

   Hinweis: Benutzen Sie für Ihre Rechnungen nur den ersten Ausdruck aus der Erweiterung. z sei positiv.

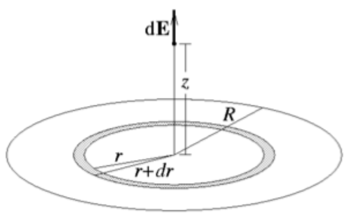
4. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus 3. (b) mit dem Ergebnis, das Sie aus der Anwendung des Coulomb - Gesetzes für eine Punktladung erhalten.

Lösung:

1. In dieser Aufgabe ist das Ergebnis für das elektrische Feld eines Ringes als Hinweis gegegebn:

$$\vec{E}_{Ring} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qz}{(z^2+r^2)^{3/2}}\vec{e}_z \tag{49}$$

Nun haben wir keinen Ring, sondern eine Scheibe. Der Trick besteht darin, diese Scheibe in Ringe zu unterteilen (siehe Skizze).



Für diese Ringe ist ihr jeweiliges E - Feld dE bekannt. Diese lassen sich dann über den Radius R der Scheibe integrieren. Die Fläche des in der Abbildung markierten Ringes beträgt:

$$\mathrm{d}A = 2\pi r\mathrm{d}r \tag{50}$$

und die Ladung:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}q = \sigma\mathrm{d}A = \left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)(2\pi r\mathrm{d}r) \tag{51}$$

Daher ist das elektrische Feld dieses Ringes gegeben durch:

$$d\vec{E} = \vec{e}_z\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dqz}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \vec{e}_z\frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \tag{52}$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, benutzt man die Substitution:

$$s = \sqrt{z^2 + r^2} \tag{53}$$

wodurch:

$$rdr = sds \tag{54}$$

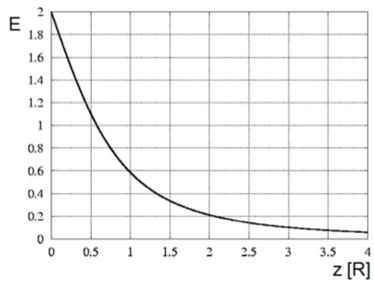
und das Integral dann die Form $\int s^{-2} ds$ hat:

$$\begin{aligned} E = \int dE &= \vec{e}_z \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{rdr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \vec{e}_z \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left[\frac{-1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R \end{aligned} \tag{55}$$

Also ist das elektrische Feld gegeben durch:

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_z \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_o R^2} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \tag{56}$$

2. Das elektrische Feld sieht folgendermaßen aus:



3. Für positive z kann $\vec{E}(z)$ geschrieben werden als:

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_z \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{\frac{z}{R}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}} \right) \tag{57}$$

Wir können die Kurvenform aus 2. für große und kleine z verstehen, wenn wir $\vec{E}(z)$ durch eine Taylor-Reihe erweitern:

$$f(u) = f(a) + f'(a)(u - a) + ... \tag{58}$$

Wir können $(1 + u)^n$ um $a = 0$ erweitern und erhalten so:

$$(1 + u)^n \approx 1 + nu + ... \tag{59}$$

Dies ist eine gute Näherung für $u << 1$.
Nun wir Gleichung (??) für den Fall $z^2 << R^2$ mit der Näherung:

$$\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2 \tag{60}$$

zu:

$$\begin{aligned}\vec{E}_z &= \vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{z}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)\right) \\ &\approx \vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \quad f\ddot{u}r \quad z^2 << R^2\end{aligned} \tag{61}$$

Für den Fall dass $z^2 >> R^2$, gilt das elektrische Feld:

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_z \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{z^2} + 1}}\right) \tag{62}$$

d. h. man bringt den Nenner in eine Form, so dass die Näherung für $u << 1$ verwendet werden kann.
Dann ist für $\frac{R^2}{z^2} << 1$:

$$\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 \tag{63}$$

Somit:

$$\vec{E}_z \approx \vec{e}_z \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{z^2} \quad f\ddot{u}r \quad z^2 >> R^2 \tag{64}$$

4. Gleichung (64) schaut natürlich so aus wie der Fall, in dem das Coulomb-Gesetz auf eine Punktladung Q angewendet wird.

8 Plattenkondensatoren

Eine Parallelschaltung zweier gleicher $2,00\mu F$ - Plattenkondensatoren (ohne Dielektrikum im Zwischenraum zwischen den Platten) wird an eine $100V$ - Batterie angeschlossen. Anschließend wird die Verbindung zur Batterie getrennt und der Abstand zwischen den Platten eines der Kondensatoren verdoppelt. Ermitteln Sie die Ladung auf der positiv geladenen Platte jedes Kondensators.

Lösung:

Die Ersatzkapazität der beiden parallelgeschalteten $2,00\mu F$ - Plattenkondensatoren ist:

$$C = 2,00\mu F + 2,00\mu F = 4,00\mu F \tag{65}$$

Gemäß der Definition der Kapazität beträgt die Ladung auf dem Ersatzkondensator:

$$q = CU = (4,00\mu F)(100V) = 400\mu C \tag{66}$$

Diese Ladung verteilt sich nach dem Trennen von der Batterie auf beiden Kondensatoren:

$$q = q_1 + q_2 \tag{67}$$

Weil die Kondensatoren parallelgeschaltet sind, gilt nach dem Trennen von der Batterie und dem Verdoppeln des Plattenabstandes:

$$U_1 = U_2 \quad \text{und} \quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_{2,2d}} = \frac{q_2}{\frac{1}{2}C_2} = \frac{2q_2}{C_2} \tag{68}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die Kapazität des zweiten Kondensators $C_{2,2d}$ nach dem Verdoppeln des Plattenabstandes nur noch halb so groß ist. Auflösen nacht q_1 liefert:

$$q_1 = 2\frac{C_1}{C_2}q_2 \tag{69}$$

Einsetzen von Gleichung 67 in Gleichung 69 und Auflösen nach q_2 ergibt:

$$q_2 = \frac{q}{2\frac{C_1}{C_2} + 1} = \frac{400\mu C}{2\frac{2,00\mu F}{2,00\mu F} + 1} = 133\mu C \tag{70}$$

Mit Gleichung 67 oder 69 und der zuvor berechneten Ladung q ergibt sich $q_1 = 267\mu C$.

9 Plattenkondensator mit Dielektrika

Die positiv geladene Platte eine Plattenkondensators trägt die Ladung q. Wenn der Zwischenraum zwischen den Platten luftleer ist, beträgt die elektrische Feldstärke zwischen ihnen $2,5 \cdot 10^5 V/m$. Nachdem der Zwischenraum mit einem bestimmten Dielektrikum gefüllt wurde, sinkt die Feldstärke zwischen den Platten auf $1,2 \cdot 10^5 V/m$.

1. Wie groß ist die relative Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums?
2. Wie groß ist der Flächeninhalt der Platten bei $q = 10nC$?
3. Wie groß ist die insgesamt induzierte Ladung auf jeder Seite des Dielektrikums?

Lösung:

1. Die relative Dielektrizitätskonstante ε_{rel} verknüpft das elektrische Feld E_0 ohne Dielektrikum mit dem Feld E bei Vorhandensein eines Dielektrikums: $E = \frac{E_0}{\varepsilon_{rel}}$. Damit ergibt sich:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{E_0}{E} = \frac{2.5 \cdot 10^5 V/m}{1,2 \cdot 10^5 V/m} = 2,08 = 2,1 \tag{71}$$

2. Das elektrische Feld E_0 zwischen den Platten und die Oberflächenladungsdichte σ hängen miteinander folgendermaßen zusammen:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{q}{A}}{\varepsilon_0} \tag{72}$$

Damit erhalten wir für die Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \frac{q}{\varepsilon_0 E_0} \\ &= \frac{10nC}{(8,854 \cdot 10^{-12} N^{-1} \cdot m^{-2})(2,5 \cdot 10^5 V \cdot m^{-1})} \\ &= 4,52 \cdot 10^{-3} m^2 = 45cm^2 \end{aligned} \tag{73}$$

3. DIe Oberflächenladungsdichte der induzierten gebundenen und der freien Ladungen hängen miteinander zusammen über:

$$\sigma_{geb} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{rel}}\right)\sigma_{frei} \tag{74}$$

Damit gilt für das Verhältnis der Ladungsdichten und auch der Ladungen:

$$\frac{\sigma_{geb}}{\sigma_{frei}} = \frac{q_{geb}}{q_{frei}} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{rel}}\right) \tag{75}$$

Für den Betrag der gebundenen Ladungen ergibt sich daraus:

$$q_{geb} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{rel}}\right) q_{frei} = -\left(1 - \frac{1}{2,08}\right)(10nC) = -5,2nC \tag{76}$$

10 Punktteilchen

Ein Punktteilchen mit der Ladung $11,1nC$ befindet sich im Koordinatenursprung.

1. Welche Form(en) haben die Äquipotentialflächen in dem Gebiet um die Ladung?
2. Nehmen Sie an, dass das Potential bei $r = \infty$ null ist. Beerechnen Sie die Radien der fünf Flächen mit den Potentialen 20,0 V, 40,0 V, 60,0 V, 80,0 V bzw. 100 V und zeichnen Sie sie maßstabsgerecht um die Ladung im Mittelpunkt.
3. Sind diese Flächen äquidistant? Erläutern Sie Ihre Antwort.
4. Schätzen Sie die elektrische Feldstärke zwischen den Äquipotentialflächen mit 40,0 V und mit 60,0 V ab, indem Sie die Differenz der beiden Radien dividieren. Vergleichen Sie den Schätzwert mit dem genauen Wert in der Mitte zwischen den beiden Äquipotentialflächen.

Lösung:

1. Die Äquipotentialflächen sind konzentrische Kugelfächen, in deren Mittelpunkt sich die Ladung befindet.
2. Aus der Beziehung zwischen dem Potential und dem elektrischen Feld einer Punktladung folgt:

$$\int_a^b d\phi = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{r_a}^{r_b} r^{-2} dr \tag{77}$$

und somit:

$$\phi_b - \phi_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \tag{78}$$

Nullsetzen des Potentials ϕ_a bei $r_a = \infty$ ergibt:

$$\phi_b - 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{1}{r_b} \tag{79}$$

Daraus folgt:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}, \quad also \quad r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{q}{\phi} \tag{80}$$

Mit $q = 1,11 \cdot 10^{-8}C$ gilt daher:

$$r = \frac{(8,988 \cdot 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2})(1,11 \cdot 10^{-8}C)}{\phi} = \frac{99,77 N \cdot m^2 \cdot C^{-1}}{\phi} \tag{81}$$

Damit ergibt sich folgende Wertetabelle:

Die entsprechenden Äquipotentialflächen können nun einfach gezeichnet werden.

ϕ [V]	20,0	40,0	60,0	80,0	100
r [m]	4,99	2,49	1,66	1,25	1,00

3. Nein. Die Äquipotentialflächen sind dort einander am nächsten, wo die elektrische Feldstärke am größten ist.

4. Für das elektrische Feld gilt:

$$E = -\frac{\Delta\phi}{\Delta r} = -\frac{40V - 60V}{\Delta r} \tag{82}$$

Den Abstand Δr zwischen den beiden Äquipotentialflächen können wir näherungsweise der Abbildung entnehmen:

$$E \approx \frac{40V - 60V}{2,4m - 1,7m} = 29V \cdot m^{-1} \tag{83}$$

Der exakte Wert für das elektrische Feld in der Mitte zwischen beiden Äquipotentialflächen ergibt sich aus der Beziehung $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, wobei für r der Mittelwert der in Teilaufgabe 2. berechneten Radien beider Äquipotentialflächen einzusetzen ist. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_{exakt} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \\ &= \frac{(8,988 \cdot 10^9 N \cdot m^2 \cdot C^{-2})(1,11 \cdot 10^{-8} C)}{\left(\frac{1}{2}(1,66m + 2,49m)^2\right)} \end{aligned} \tag{84}$$

Der abgeschätzte Wert unterscheidet sich also um etwa 21 % vom exakten Wert.